Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

SS 2015
18. Juni 2015

Funktionentheorie

Übungsblatt 9

Aufgabe 33

Seien $U, V \subset \mathbb{C}$ offene Mengen und $\varphi : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $\varphi(U) \subset V$. Man zeige:

Für jede harmonische Funktion $h : V \to \mathbb{R}$ ist auch die Funktion $h \circ \varphi : U \to \mathbb{R}$ harmonisch.

Aufgabe 34

a) Sei $a \in \mathbb{C}$ mit $0 < |a| < 1$. Man zeige

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |e^{it} - a| \, dt = 0.$$

Anleitung. Für $|z| = 1$ gilt $|z - a| = |1 - z\overline{a}|$. Man wende auf die harmonische Funktion $z \mapsto \log |1 - z\overline{a}|$ den Mittelwertsatz an.

b) Sei $r > 0$ und seien $a_\nu \in \mathbb{C}$, $1 \leqslant \nu \leqslant n$, komplexe Zahlen mit $0 < |a_\nu| < r$. Man beweise für das Polynom $P(z) := \prod_{\nu=1}^n (z - a_\nu)$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |P(re^{it})| \, dt = n \log r.$$

c) Sei F eine holomorphe Funktion, die in einer offenen Umgebung der abgeschlossenen Kreisscheibe $\overline{D}_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant r\}$ definiert ist. Es gelte $F(0) \neq 0$ und $F(z) \neq 0$ für alle $z \in \partial D_r$. Es seien $a_1, \ldots, a_n$ die Nullstellen von F in D_r, wobei jede so oft aufgezählt ist, wie ihrer Vielfachheit entspricht. Man beweise

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |F(re^{it})| \, dt = \log |F(0)| - \sum_{\nu=1}^n \log \left| \frac{a_\nu}{r} \right|.$$

Aufgabe 35

Sei $D_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ der Einheitskreis und $\partial D_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ sein Rand. Der *Poisson-Kern* für den Einheitskreis ist die Funktion

$$P : \partial D_1 \times D_1 \to \mathbb{R}, \quad (\zeta, z) \mapsto P(\zeta, z) := \frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2}$$

---

b.w.

Man beweise:

a) $$P(\zeta, z) = \mathrm{Re}\Big(\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\Big).$$

b) $$P(\zeta, z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\zeta}^n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \zeta^n \overline{z}^n.$$

c) Für jedes feste $\zeta \in \partial D_1$ ist die Funktion $z \mapsto P(\zeta, z)$ harmonisch in D_1.

d) $$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(e^{it}, z)\, dt = 1 \qquad \text{für alle } z \in D_1.$$

Aufgabe 36 (Fortsetzung von Aufgabe 35)

a) Für jede stetige Funktion $g : \partial D_1 \to \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$u(z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(e^{it}, z)\, g(e^{it})\, dt, \quad (z \in D_1),$$

in D_1 harmonisch.

b)* Die Funktion u aus a) kann stetig auf $\overline{D}_1$ fortgesetzt werden und stimmt dann auf ∂D_1 mit g überein (d.h. u löst das Dirichletsche Randwertproblem im Einheitskreis zu den Randwerten g).

Dieses Übungsblatt wird nicht korrigiert.