Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

SS 2015
1. Juni 2015

Funktionentheorie

Übungsblatt 7

Aufgabe 25

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze holomorphe Funktion. Es gebe positive Konstanten K, α, r_0, so dass

$$\operatorname{Re} f(z) \leqslant K|z|^\alpha \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| \geqslant r_0.$$

Man zeige: f ist ein Polynom vom Grad $\leqslant \lfloor \alpha \rfloor$.

Hinweis. Man verwende Aufgabe 24.

Aufgabe 26

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und seien $f_1, f_2, \ldots, f_n : G \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen. Die reelle Funktion

$$Q(z) := \sum_{\nu=1}^{n} |f_\nu(z)|^2$$

nehme in einem Punkt $z_0 \in G$ ihr Maximum an.

Man zeige: Alle Funktionen f_ν sind konstant.

Aufgabe 27

Sei $D = D_r(z_0) \subset \mathbb{C}$ eine Kreisscheibe und sei (f_k) eine beschränkte Folge von holomorphen Funktionen in D, d.h. es gebe ein $M > 0$, so dass

$$|f_k(z)| \leqslant M \quad \text{für alle } z \in D \text{ und alle } k \geqslant 1$$

Weiter sei $z_\nu \in D \smallsetminus \{z_0\}$, $\nu \geqslant 1$, eine Punktfolge mit $\lim z_\nu = z_0$. Man beweise mit Hilfe des Satzes von Montel:

Existiert $\lim_{k\to\infty} f_k(z_\nu)$ für jedes ν, so konvergiert die Folge (f_k) auf jedem kompakten Teil von D gleichmäßig.

Aufgabe 28

Sei $D = D_r(z_0) \subset \mathbb{C}$ eine Kreisscheibe $(0 < r < \infty)$. Eine holomorphe Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ heißt quadrat-integrierbar, falls

$$\int_D |f(x+iy)|^2 dx\, dy < \infty.$$

Mit $L^2(D, \mathcal{O})$ werde die Vektorraum aller quadrat-integrierbaren holomorphen Funktionen $f : D \to \mathbb{C}$ bezeichnet.

---

b.w.

Für $f \in L^2(D, \mathcal{O})$ definiert man die L^2-Norm durch

$$\|f\|_{L^2(D)} := \Big(\int_D |f(x+iy)|^2 dx\,dy\Big)^{1/2}$$

Außerdem ist für $f, g \in L^2(D, \mathcal{O})$ ein Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle := \int_D f(x+iy)\,\overline{g(x+iy)}\,dx\,dy$$

definiert. Man zeige:

a) Die Monome $\varphi_n(z) := (z-z_0)^n$ sind bzgl. des Skalarprodukts paarweise orthogonal.
Hinweis: Polar-Koordinaten.

b) Zu jedem kompakten Teil $K \subset D$ gibt es eine Konstante $M_K > 0$, so dass

$$\sup\{|f(z)| : z \in K\} \leqslant M_K \|f\|_{L^2(D)} \quad \text{für alle } f \in L^2(D, \mathcal{O}).$$

c) In $L^2(D, \mathcal{O})$ konvergiert jede Cauchy-Folge bzgl. der L^2-Norm.

Abgabetermin: Montag, 15. Juni 2015, 14 Uhr