Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

SS 2015
18. Mai 2015

Funktionentheorie

Übungsblatt 5

Aufgabe 17

Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenz-Radius $R > 0$.

Man zeige: Für alle $0 < r < R$ gilt

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} \leqslant M_r^2,$$

wobei $M_r := \sup\{|f(z)| : |z| = r\}$.

Aufgabe 18 Sei

$$G := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < r\}$$

die punktierte Kreisscheibe vom Radius $r > 0$ und $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Man zeige:

a) Ist der Realteil von f nach oben (oder nach unten) beschränkt, so hat f im Nullpunkt eine hebbare Singularität.

b) Es gebe positive reelle Konstanten M, α und $r_0 \in \,]0, r[$, so dass

$$|f(z)| \leqslant M|z|^{-\alpha} \quad \text{für alle } z \text{ mit } 0 < |z| \leqslant r_0.$$

Dann ist hat f in 0 eine Polstelle der Ordnung $\leqslant \alpha$ oder eine hebbare Singularität. Falls $\alpha < 1$, tritt der letztere Fall ein.

c) Es gebe positive reelle Konstanten M, α und $r_0 \in \,]0, r[$, so dass

$$|f(z)| \geqslant M|z|^{-\alpha} \quad \text{für alle } z \text{ mit } 0 < |z| \leqslant r_0.$$

Dann hat f in 0 eine Polstelle der Ordnung $\geqslant \alpha$.

d) Gibt es eine holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ mit

$$|f(z)| \geqslant e^{\sqrt{1/|z|}} \quad \text{für alle } z \in G\ ?$$

Aufgabe 19

Sei f die rationale Funktion

$$f(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}$$

und seien $0 < r_1 < r_2$ die Beträge der Nullstellen von $z^2 + z - 1$. Nach Aufgabe 4 besitzt f in der Kreisscheibe $\{|z| < r_1\}$ eine Taylor-Entwicklung $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, wobei c_n die Fibonacci-Zahlen sind.

a) Man entwickle die Funktion f in den Ringgebieten

$$A_1 := \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z| < r_2\} \quad \text{und} \quad A_2 := \{z \in \mathbb{C} : r_2 < |z| < \infty\}$$

in Laurent-Reihen.

b) Man zeige, dass die Koeffizienten der Laurent-Entwicklung von f in A_2 ganzzahlig sind. Wie hängen sie mit den Fibonacci-Zahlen zusammen?

Aufgabe 20

Bekannlich besitzt die Funktion Cotangens in $\{0 < |z| < \pi\}$ die Laurent-Entwicklung

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} z^{2k-1}$$

mit den Bernoulli-Zahlen B_{2k}.

a) Man zeige, dass die Funktion

$$F(z) := \cot z - \frac{1}{z} - \frac{1}{z - \pi} - \frac{1}{z + \pi}$$

in den Punkten $0, \pi, -\pi$ hebbare Singularitäten besitzt und sich im Kreis $\{|z| < 2\pi\}$ in eine Taylor-Reihe entwickeln lässt. Man bestimme die Koeffizienten dieser Taylor-Reihe.

b) Man entwickle die Funktion Cotangens im Kreisring $\{\pi < |z| < 2\pi\}$ in eine Laurent-Reihe

$$\cot z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n.$$

Abgabetermin: Montag, 1. Juni 2015, 14 Uhr