Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

SS 2015
7. Mai 2015

Funktionentheorie

Übungsblatt 4

Aufgabe 13

Der folgende 'Beweis' zeigt, dass $1 > 10^{10}$. Man finde den (die) Fehler.

$$\text{Da}\quad e > 2 \text{ und } 2\pi > 6, \quad \text{ist} \quad e^{2\pi} > 2^6, \tag{1}$$

$$\text{also} \quad e^{4\pi^2} = (e^{2\pi})^{2\pi} > (2^6)^6 = 2^{36} > 10^{10}. \tag{2}$$

$$\text{Weiter gilt} \quad e^{2\pi i+1} = e, \tag{3}$$

$$\text{also auch} \quad e^{(2\pi i+1)^2} = \left(e^{2\pi i+1}\right)^{2\pi i+1} = e^{2\pi i+1} = e. \tag{4}$$

$$\text{Andererseits ist} \quad e^{(2\pi i+1)^2} = e^{-4\pi^2+4\pi i+1} \tag{5}$$

$$= e^{-4\pi^2+1} = e^{-4\pi^2}e. \tag{6}$$

$$\text{Aus (4) und (6) folgt } e^{-4\pi^2} = 1, \quad \text{also} \quad e^{4\pi^2} = 1. \tag{7}$$

$$\text{Zusammen mit (2) erhält man} \quad 1 > 10^{10}. \tag{8}$$

Aufgabe 14

Die reellen Funktionen $U, V :]-\pi, \pi[\to \mathbb{R}$ seien definiert durch

$$U(t) + iV(t) = \mathrm{Log}(1 + e^{it}).$$

Man bestimme explizite Formeln für U und V.

Hinweis. Es gilt $1 + e^{it} = re^{it/2}$ mit einer geeigneten reellen Zahl $r > 0$.

Aufgabe 15

Seien $(a_n)_{n\geqslant 0}$ und $(b_n)_{n\geqslant 0}$ Folgen komplexer Zahlen und

$$A_n := \sum_{k=0}^{n} a_k, \qquad A_{-1} := 0.$$

a) Man beweise folgende Formel (Abelsche partielle Summation)

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = (A_n b_{n+1} - A_{m-1} b_m) - \sum_{k=m}^{n} A_k (b_{k+1} - b_k) \qquad \text{für } n \geqslant m \geqslant 0.$$

---

b.w.

b) Man zeige: Konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, so existiert für jedes reelle r mit $0 \leqslant r < 1$ die Summe

$$A(r) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$$

und es gilt

$$\lim_{r \nearrow 1} A(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

c) Man zeige an einem Beispiel, dass folgender Fall eintreten kann: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergiert, obwohl $\lim_{r \nearrow 1} A(r)$ existiert.

Aufgabe 16

a) Man zeige mittels Abelscher partieller Summation:

Für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $-\pi < t < \pi$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} e^{int}$$

und hat den Grenzwert $\operatorname{Log}(1 + e^{it})$.

b) Welche Formeln erhält man daraus durch Trennung von Real- und Imaginärteil?

Abgabetermin: Montag, 18. Mai 2015, 14 Uhr