Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

SS 2015
30. April 2015

Funktionentheorie

Übungsblatt 3

Aufgabe 9

a) Man entwickle den Hauptzweig des Logarithmus um den Punkt $1+i$ in eine Potenzreihe

$$(*) \qquad \operatorname{Log}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-(1+i))^n,$$

insbesondere bestimme man explizit alle Koeffizienten c_n.

b) Man zeige, dass der Punkt $z = 1$ im Innern des Konvergenzkreises der Reihe $(*)$ liegt. Aus der Darstellung von $\operatorname{Log}(1) = 0$ durch die Reihe $(*)$ leite man Formeln für $\log(2)$ bzw. $\pi/4$ her.

Aufgabe 10

Sei $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$F(z) := \exp(\exp(z)).$$

a) Man berechne Real- und Imaginärteil von F.

b) Ist die Gleichung $\exp(\exp(z)) = 1$ lösbar? Man bestimme gegebenenfalls alle Lösungen.

Aufgabe 11

Man betrachte die Abbildung

$$\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

a) Man bestimme die Bilder der Geraden

$$V_\alpha := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = \alpha\} \quad \text{und} \quad H_\beta := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) = \beta\}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

b) Man zeige: Durch die Abbildung sin wird der Streifen

$$S := \{z \in \mathbb{C} : -\pi/2 < \operatorname{Re}(z) < \pi/2\}$$

bijektiv auf die offene Menge

$$\Omega := \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : |x| \geqslant 1\}$$

abgebildet. (Die Umkehrabbildung heißt Hauptzweig von arcsin).

---

b.w.

Aufgabe 12

Seien N und r positive ganze Zahlen.

a) Man beweise die Formel

$$\sum_{n=1}^{N-1} n^r = \frac{1}{r+1} \sum_{k=0}^{r} \binom{r+1}{k} B_k N^{r+1-k}.$$

Dabei sind B_k die Bernoullizahlen.

Anleitung. Man verwende die Identität

$$\frac{e^{Nz}-1}{z} \cdot \frac{z}{e^z-1} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{nz} = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{N-1} n^r \right) \frac{z^r}{r!}.$$

sowie die Definitions-Gleichung

$$\frac{z}{e^z-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k.$$

b) Aus a) leite man ab

$$\sum_{n=1}^{N} n^r = \frac{1}{r+1} N^{r+1} + \frac{1}{2} N^r + \sum_{\ell=1}^{\lfloor r/2 \rfloor} \binom{r}{2\ell-1} \frac{B_{2\ell}}{2\ell} N^{r+1-2\ell}.$$

Dabei bedeutet $\lfloor r/2 \rfloor$ die größte ganze Zahl $m \leqslant r/2$.

Man schreibe die Formeln für $r = 1, 2, 3, 4, 5$ explizit aus.

Abgabetermin: Montag, 11. Mai 2015, 14 Uhr