Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

SS 2015
23. April 2015

Funktionentheorie
Übungsblatt 2

Aufgabe 5

Sei $\alpha > 0$ eine positive reelle Zahl und

$$c_{00} := 0, \qquad c_{k\ell} := \frac{(-1)^k}{(k+\ell)^\alpha} \quad \text{für } (k,\ell) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \smallsetminus \{(0,0)\}.$$

a) Für welche α gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} |c_{k\ell}| < \infty$$

b) Für welche α konvergieren die Reihen

$$\text{(i)} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} c_{k\ell}, \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} c_{k\ell}, \qquad \text{(iii)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k+\ell=n} c_{k\ell}.$$

Aufgabe 6

a) Gegeben seien die beiden Potenzreihen

$$f(z) := 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^n \quad \text{und} \quad g(z) := 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n z^n$$

Man bilde das Cauchy-Produkt der beiden Potenzreihen. Welche Konvergenz-Radien haben die Reihen f, g und fg ?

b) Man gebe eine Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit Konvergenz-Radius 1 an, so dass das Cauchy-Produkt von f mit sich selbst,

$$f(z)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

den Konvergenz-Radius ∞ hat.

---

b.w.

Aufgabe 7 Sei

$$\frac{1}{\cos z} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

die Potenzreihen-Entwicklung von $1/\cos z$ um den Nullpunkt. Man zeige:

a) Es gilt $c_n = 0$ für alle ungeraden n.

b) Die Zahlen $E_n := n!\, c_n$ liegen in $\mathbb{Z}$.

c) Man berechne E_{2k} für $0 \leqslant k \leqslant 5$.

Aufgabe 8

Sei $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ die Funktion

$$f(z) := z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right).$$

Man zeige: Es gibt Folgen $a_\nu, b_\nu \in \mathbb{C}^*$ mit $\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu = \lim\limits_{\nu\to\infty} b_\nu = 0$ und

$$\lim_{\nu\to\infty} |f(a_\nu)| = \infty, \quad \lim_{\nu\to\infty} f(b_\nu) = i.$$

Man gebe solche Folgen möglichst explizit an.

Abgabetermin: Montag, 4. Mai 2015, 14 Uhr