Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

SS 2015
16. April 2015

Funktionentheorie

Übungsblatt 1

Aufgabe 1

Man bestimme die Konvergenzradien der beiden Potenzreihen

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(n+1)} \quad \text{und} \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1}\, z^{n^2}.$$

In welchen Punkten des Randes des Konvergenzkreises konvergieren die Reihen?

Aufgabe 2

a) Man bestimme die Konvergenzradien der beiden Potenzreihen

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{n^2} z^n \quad \text{und} \quad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{n^2} z^{n^2}$$

Hinweis. Man verwende die Formel $e = \lim\limits_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n$.

b)* Man bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\cos n) z^n$$

Aufgabe 3

Seien $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ zwei Potenzreihen mit Konvergenzradien r_1 bzw. r_2. Der Konvergenzradius der Summen-Reihe

$$h(z) := f(z) + g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$$

werde mit r bezeichnet. Man zeige:

a) In jedem Fall gilt $r \geqslant \min(r_1, r_2)$.

b) Falls $r_1 \neq r_2$, gilt $r = \min(r_1, r_2)$.

c) Man zeige an Beispielen, dass im Fall $r_1 = r_2 < \infty$ sowohl $r > r_1$ als auch $r = r_1$ vorkommen kann.

---

b.w.

Aufgabe 4

a) Man entwickle die Funktion

$$f(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}$$

um den Nullpunkt in eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, indem man $f(z)$ als Summe von Partialbrüchen darstelle.

b) Was ist der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$?

c) Man zeige: Die Koeffizienten c_n sind gleich den Fibonacci-Zahlen $\operatorname{fib}(n)$, die rekursiv wie folgt definiert sind:

$$\operatorname{fib}(0) = 0, \quad \operatorname{fib}(1) = 1 \quad \text{und}$$
$$\operatorname{fib}(n+1) = \operatorname{fib}(n) + \operatorname{fib}(n-1) \quad \text{für alle } n \geqslant 1.$$

Abgabetermin: Donnerstag, 23. April, 14 Uhr

Bitte Anmeldung (online) nicht vergessen!