Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

WS 2014/15
12. Jan. 2015

Dirichletreihen und Zetafunktionen
Übungsblatt 11

Aufgabe 41

Für eine ganze holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sei die Funktion $M_f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ definiert durch

$$M_f(r) := \sup\{|f(z)| : |z| = r\}.$$

Die Funktion f heißt ganz von der Ordnung $\alpha \in \mathbb{R}_+$, falls

$$\alpha = \inf\{a \in \mathbb{R}_+ : M_f(r) = O(\exp(r^a))\}.$$

Man beweise: Ist f eine ganze holomorphe Funktion der Ordnung $\alpha < 1$ und hat f keine Nullstellen, so ist f konstant.

Aufgabe 42

a) Man zeige: Die Funktion

$$F(s) := s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$$

ist eine ganze holomorphe Funktion der Ordnung 1.

b) Es gibt eine ganze holomorphe Funktion $\Phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ der Ordnung $\frac{1}{2}$ mit

$$\Phi(z^2) = F(\tfrac{1}{2} + z) \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

c) Man schließe daraus, dass die Zetafunktion im Streifen $\{0 < \mathrm{Re}(s) < 1\}$ unendlich viele Nullstellen besitzt.

Aufgabe 43

Die Funktionalgleichung der Zetafunktion lässt sich schreiben als

$$\zeta(s) = \chi(s)\zeta(1-s) \quad \text{mit} \quad \chi(s) = \frac{(2\pi)^s}{2\cos(\frac{\pi s}{2})\Gamma(s)}.$$

Man beweise:

a) χ ist holomorph und $\neq 0$ in

$$G := \mathbb{C} \smallsetminus \{\sigma \in \mathbb{R} : |\sigma - \tfrac{1}{2}| \geqslant \tfrac{1}{2}\}.$$

b) Es gibt eine eindeutig bestimmte holomorphe Funktion $h : G \to \mathbb{C}$ mit

$$h(s)^2 = \chi(s)^{-1} \qquad \text{und} \qquad h(\tfrac{1}{2}) = 1.$$

c) Sei $\quad Z(t) := h(\frac{1}{2} + it)\zeta(\frac{1}{2} + it)$. Dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}$

$$Z(t) \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad |Z(t)| = |\zeta(\tfrac{1}{2} + it)|.$$

---

b.w.

Aufgabe 44

Sei p eine Primzahl $\equiv 1 \bmod 4$. Man beweise: Die Grundeinheit u_0 des Ganzheitsrings des quadratischen Zahlkörpers $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ hat negative Norm, also $\mathrm{N}(u_0) = -1$.

Hinweis. Man gehe aus von einer minimalen nicht-trivialen Lösung $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ der Gleichung

$$x^2 - py^2 = 1, \qquad \text{d.h.} \qquad (x-1)(x+1) = py^2$$

und untersuche die Möglichkeiten für $\gcd(x-1, py)$ und $\gcd(x+1, py)$.

Klausur am Montag, 26. Januar 2015, 14 hct.