Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

WS 2014/15
17. Dez. 2014

Dirichletreihen und Zetafunktionen
Übungsblatt 10

Aufgabe 37 Sei a eine positive reelle Konstante.

a) Mittels Residuenkalkül berechne man die Fourier-Transformierte der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := \frac{1}{a^2 + x^2}.$$

b) Man bestimme den Wert der unendlichen Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 + n^2}$.

Aufgabe 38

Man beweise: $\zeta(\sigma) < 0$ für alle $\sigma \in \mathbb{R}$ mit $-2 < \sigma < 1$.

Aufgabe 39

a) Sei $g(s) := \cos(\frac{\pi s}{2})\zeta(s)$. Man zeige, dass die Funktion g an der Stelle $s = 1$ eine hebbare Singularität hat und bestimme $g(1)$ und $g'(1)$.

b) Man beweise: $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$ und $\zeta'(0) = -\log\sqrt{2\pi}$.

Anleitung: Man benutze die Funktionalgleichung von ζ, Aufgabe 35, sowie Teil a).

Aufgabe 40

a) Man zeige: Für jedes $\sigma > 1$ gilt

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_T^{2T} \zeta(\sigma + it)\, dt = 1.$$

b)* Man beweise:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_T^{2T} \zeta(\tfrac{1}{2} + it)\, dt = 1.$$