Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

WS 2014/15
5. Dez. 2014

Dirichletreihen und Zetafunktionen

Übungsblatt 9

Aufgabe 33

Man beweise für die Cotangens-Funktion: Für alle $|z| < 1$ gilt

$$\pi z \cot \pi z = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^2}{z^2 - n^2} = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \zeta(2n) z^{2n}$$

Aufgabe 34 Man zeige: Für reelles t gilt

$$|\Gamma(it)|^2 = \frac{\pi}{t \sinh(\pi t)}, \quad (t \neq 0), \quad \text{und} \quad |\Gamma(\tfrac{1}{2} + it)|^2 = \frac{\pi}{\cosh(\pi t)}.$$

Aufgabe 35 Man beweise:

$$\lim_{z \to 0} \Big(\Gamma(z) - \frac{1}{z} \Big) = \Gamma'(1) = -\gamma.$$

Dabei ist γ die Euler-Mascheronische Konstante.

Aufgabe 36

Man beweise für alle ganzen Zahlen $m \geqslant 2$

a) $$\prod_{k=1}^{m-1} (1 - e^{2\pi ik/m}) = m,$$

b) $$\prod_{k=1}^{m-1} \sin\Big(\frac{k\pi}{m}\Big) = \frac{m}{2^{m-1}},$$

c) $$\prod_{k=1}^{m-1} \Gamma\Big(\frac{k}{m}\Big) = \sqrt{\frac{(2\pi)^{m-1}}{m}},$$

d) $$\prod_{k=0}^{m-1} \Gamma\Big(\frac{z+k}{m}\Big) = (2\pi)^{\frac{m-1}{2}} m^{\frac{1}{2}-z}\, \Gamma(z).$$
