Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

WS 2014/15
28. Nov. 2014

Dirichletreihen und Zetafunktionen

Übungsblatt 8

Aufgabe 29 Für die Tschebyscheffsche Psi-Funktion beweise man die Formel

$$\sum_{n \leqslant x} \psi\Big(\frac{x}{n}\Big) = \log(\lfloor x \rfloor !).$$

Aufgabe 30

Sei r eine natürliche Zahl. Man beweise folgende Summenformel für die r-ten Potenzen:

$$\sum_{k=1}^{n} k^r = \frac{1}{r+1} n^{r+1} + \alpha_{rr} n^r + \ldots + \alpha_{r1} n$$

mit rationalen Zahlen α_{rj}, $j = 1, \ldots, r$. Man drücke diese Koeffizienten α_{rj} durch die Bernoulli-Zahlen aus.

Aufgabe 31 Man beweise:

a) $$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \Big(\sum_{k=1}^{n} k\Big)^2.$$

b) Für die Teileranzahl-Funktion τ gilt

$$\sum_{d|n} \tau(d)^3 = \Big(\sum_{d|n} \tau(d)\Big)^2$$

Anleitung: Man beweise die Formel zunächst für eine Primzahl-Potenz $n = p^k$.

Aufgabe 32

a) Man beweise folgende Approximation für die Euler-Mascheronische Konstante γ: Für alle $n \geqslant 1$ und $r \geqslant 1$ gilt

$$\gamma = \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n\Big) - \frac{1}{2n} + \sum_{j=1}^{r-1} \frac{B_{2j}}{2j} \cdot \frac{1}{n^{2j}} + \theta \cdot \Big(\frac{B_{2r}}{2r} \cdot \frac{1}{n^{2r}}\Big)$$

mit $0 \leqslant \theta \leqslant 1$.

b) Man gebe geeignete Werte von n und r an, um damit γ auf 1000 Dezimalstellen genau zu berechnen.

c) Man zeige: Für festes n gilt $\lim\limits_{r \to \infty} \Big(\frac{B_{2r}}{2r} \cdot \frac{1}{n^{2r}}\Big) = \infty.$