Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

WS 2014/15
21. Nov. 2014

Dirichletreihen und Zetafunktionen

Übungsblatt 7

Aufgabe 25

Man beweise für festes $\varepsilon > 0$ die asymptotische Beziehung

$$\pi((1+\varepsilon)x) - \pi(x) \sim \frac{\varepsilon x}{\log x},$$

insbesondere $\pi(2x) - \pi(x) \sim \pi(x)$.

Aufgabe 26 Man zeige:

a) Für alle $m \geqslant 1$ gilt

$$\int_2^x \frac{dt}{\log^m t} = O\Big(\frac{x}{\log^m x}\Big).$$

b) Für alle $m \geqslant 2$ gilt

$$\int_2^x \frac{dt}{\log t} = \frac{x}{\log x} + \sum_{k=2}^{m-1} \frac{(k-1)!\,x}{\log^k x} + (m-1)! \int_2^x \frac{dt}{\log^m t} + C_m.$$

Dabei ist C_m eine (von x unabhängige) Konstante.

c) Es gibt *kein* $\delta > 0$ mit

$$\int_2^x \frac{dt}{\log t} - \frac{x}{\log x} = O(x^{1-\delta})$$

Aufgabe 27

Die Liouvillesche Funktion $\lambda : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{Z}$ ist wie folgt definiert: Sei $n = p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{k_r}$ die Primfaktorzerlegung von $n \in \mathbb{N}_1$ und $k := \sum_{j=1}^r k_j$. Dann setzt man

$$\lambda(n) := (-1)^k.$$

Für quadratfreies n gilt also $\lambda(n) = \mu(n)$ (dabei ist μ die Möbius-Funktion).
Man beweise die Summenformel

$$\sum_{d|n} \lambda(d) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n \text{ eine Quadratzahl ist,} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

sowie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} \qquad \text{für } \mathrm{Re}(s) > 1.$$

---

b.w.

Aufgabe 28

Für $x \geqslant 1$ bezeichne $\nu_{\mathrm{ev}}(x)$ die Anzahl aller natürlichen Zahlen $n \leqslant x$, die eine gerade Anzahl von Primfaktoren (mit Vielfachheit gerechnet) haben, d.h. für die $\lambda(n) = 1$ gilt, und $\nu_{\mathrm{odd}}(x)$ die Anzahl aller natürlichen Zahlen $n \leqslant x$ mit $\lambda(n) = -1$.

Man beweise: Falls

$$|\nu_{\mathrm{ev}}(x) - \nu_{\mathrm{odd}}(x)| = O(x^{\alpha})$$

mit einer reellen Konstanten $\alpha \geqslant 1/2$, so hat die Zetafunktion $\zeta(s)$ keine Nullstellen mit $\mathrm{Re}(s) > \alpha$.

Hinweis. Man stelle $\zeta(2s)/\zeta(s)$ als Mellin-Transformierte dar.
