MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
PROF. DR. O. FORSTER

WS 2014/15
14. Nov. 2014

Dirichletreihen und Zetafunktionen
Übungsblatt 6

Aufgabe 21

Sei $\mathbb{P}$ die Menge aller Primzahlen und $A \subset \mathbb{P}$ eine Teilmenge. Für reelles $x > 0$ sei

$$\pi_A(x) := \#\{p \in A : p \leqslant x\}, \qquad \pi(x) = \pi_{\mathbb{P}}(x).$$

Unter der *natürlichen Dichte* von A versteht man im Falle der Existenz den Grenzwert

$$\delta_{\mathrm{nat}}(A) := \lim_{x\to\infty} \frac{\pi_A(x)}{\pi(x)}.$$

Man beweise: Existiert die natürliche Dichte von A, so auch die Dirichlet-Dichte und es gilt $\delta_{\mathrm{Dir}}(A) = \delta_{\mathrm{nat}}(A)$.

Aufgabe 22 Sei $(q_n)_{n\geqslant 1}$ eine monoton wachsende Folge positiver reeller Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} q_n = \infty$. Für $x > 0$ werde definiert

$$Q(x) := \max\{n \in \mathbb{N} : q_n \leqslant x\}.$$

Man zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

a) $\quad q_n \sim n \log n,$

b) $\quad Q(x) \sim \dfrac{x}{\log x}.$

Aufgabe 23

a) Man zeige: Für jede Folge $0 < q_1 < q_2 < \ldots < q_n < q_{n+1} < \ldots$ reeller Zahlen mit $q_n \sim n \log n$ gilt:

$$\sum_{q_n\leqslant x} \frac{1}{q_n} \sim \log\log x \qquad \text{für } x \to \infty.$$

b)* Existiert für jede Folge $q_1 < q_2 < \ldots < q_n < q_{n+1} < \ldots$ natürlicher Zahlen mit $q_n \sim n \log n$ der Limes

$$\lim_{x\to\infty} \Big(\sum_{q_n\leqslant x} \frac{1}{q_n} - \log\log x \Big) \ ?$$

Beweis oder Gegenbeispiel!

Aufgabe 24 Es sei saw: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $\mathrm{saw}(x) := x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}$ (Sägezahnfunktion). Man berechne die Mellin-Transformierte

$$F(s) := \int_1^\infty \mathrm{saw}(x) x^{-s} \frac{dx}{x}, \qquad \mathrm{Re}(s) > 0.$$