Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

WS 2014/15
11. Nov. 2014

Dirichletreihen und Zetafunktionen

Übungsblatt 5

Aufgabe 17

Für eine ganze Zahl r mit $0 \leqslant r \leqslant 18$ sei A_k die Menge aller Primzahlen p, deren Dezimal-Darstellung

$$p = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot 10^k, \qquad a_k \in \{0, 1, \ldots, 9\},$$

der Bedingung $a_1 + a_2 = r$ genügt. Man zeige, dass die Dirichlet-Dichte $\delta_{\mathrm{Dir}}(A_k)$ existiert und berechne sie explizit.

Aufgabe 18

Sei A die Menge aller Primzahlen, deren Dezimal-Darstellung keine Ziffer 1 enthält. Man zeige, dass die Dirichlet-Dichte von A gleich 0 ist.

Aufgabe 19

Für eine reelle Zahl $a > 0$ ist die *Hurwitz'sche Zetafunktion* definiert durch

$$\zeta(s, a) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^s}, \qquad \mathrm{Re}(s) > 1.$$

a) Man zeige mittels Abelscher partieller Summation, dass sich $\zeta(s, a)$ meromorph in die Halbenene $\{\mathrm{Re}(s) > 0\}$ fortsetzen lässt mit einem einzigen Pol 1. Ordnung an der Stelle $s = 1$.

b) Sei $m \geqslant 2$ eine natürliche Zahl und χ ein Dirichlet-Charakter modulo m. Man beweise

$$L(s, \chi) = \frac{1}{m^s} \sum_{k=1}^{m} \chi(k) \zeta(s, k/m).$$

Aufgabe 20

Für eine reelle Zahl $x \geqslant 1$ sei $\pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen $\leqslant x$ und

$$\pi_1(x) := \sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k} \pi(x^{1/k}).$$

Man beweise für $\mathrm{Re}(s) > 1$ die Integral-Darstellungen

$$\log \zeta(s) = s \int_1^{\infty} \frac{\pi_1(x)}{x^{s+1}} \, dx = s \int_1^{\infty} \frac{\pi(x)}{x^s - 1} \cdot \frac{dx}{x}$$