Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

WS 2014/15
31. Okt. 2014

Dirichletreihen und Zetafunktionen

Übungsblatt 4

Aufgabe 13

Sei $\mathrm{Sqfr}(x)$ die Menge aller quadratfreien natürlichen Zahlen $n \leqslant x$. Man beweise:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\#\mathrm{Sqfr}(x)}{x} = \frac{1}{\zeta(2)} = \frac{6}{\pi^2}.$$

Aufgabe 14 Sei γ die Euler-Mascheronische Konstante. Man beweise:

a) $$\sum_{n\leqslant x} \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = x(\log x + 2\gamma - 1) + O(\sqrt{x}).$$

Anleitung. Man zeige als Zwischenschritte

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x} \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = \sum_{k\ell\leqslant x} 1 &= \sum_{\substack{k\ell\leqslant x\\ k\leqslant\sqrt{x}}} 1 + \sum_{\substack{k\ell\leqslant x\\ \ell\leqslant\sqrt{x}}} 1 - \sum_{\substack{k\ell\leqslant x\\ k,\ell\leqslant\sqrt{x}}} 1\\ &= 2\sum_{k\leqslant\sqrt{x}} \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor - \lfloor\sqrt{x}\rfloor^2.\end{aligned}$$

b) $$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{n\leqslant x} \left(\frac{x}{n} - \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor \right) = 1 - \gamma.$$

Aufgabe 15

a) Man bestimme alle Dirichlet-Charaktere zum Modul $m = 8$.

b) Man zeige für jeden vom Hauptcharakter verschiedenen Dirichlet-Charakter χ

$$L(1,\chi) \neq 0.$$

Aufgabe 16 (Fortsetzung von Aufgabe 15)

Man stelle die Dirichletreihe

$$f(s) := \frac{1}{3^s} + \frac{1}{11^s} + \frac{1}{19^s} + \frac{1}{27^s} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(8k+3)^s}$$

explizit als Linearkombination von L-Reihen $L(s,\chi)$ dar.