Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

WS 2014/15
24. Okt. 2014

Dirichletreihen und Zetafunktionen

Übungsblatt 3

Aufgabe 9 Man beweise für die Summe der primitiven n-ten Einheitswurzeln

$$\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ \gcd(k,n)=1}} e^{2\pi ik/n} = \mu(n).$$

Aufgabe 10

Für eine natürliche Zahl n sei $\omega(n)$ die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren von n, d.h. $\omega(n) = r$, falls $n = p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_r^{k_r}$ mit paarweise verschiedenen Primzahlen p_j und $k_j \geqslant 1$.
Man beweise die Formel

$$\sum_{d|n} \mu\Big(\frac{n}{d}\Big)\omega(d) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n \text{ prim,}\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Hinweis. Die Formel ist äquivalent mit $\zeta(s)P(s) = \sum_{n\geqslant 1}\omega(n)/n^s$, wobei $P(s) = \sum 1/p^s$ die Primzeta-Funktion ist.

Aufgabe 11 Sei $f : H(1) \to \mathbb{C}$ eine Funktion in $H(1) := \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > 1\}$, so dass ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $f(s) = O(\sigma^{-\varepsilon})$ für $\sigma \to \infty$, $\sigma = \mathrm{Re}(s)$. Die Funktion $F : H(1) \to \mathbb{C}$ werde definiert durch

$$F(s) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(ks)}{k}.$$

a) Man zeige, dass diese Reihe für jedes $s \in H(1)$ konvergiert und dass $F(s) = O(\sigma^{-\varepsilon})$.

b) Man beweise die Umkehrformel

$$f(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(k)\frac{F(ks)}{k}.$$

Aufgabe 12

Sie G eine (multiplikative) abelsche Gruppe und $f : \mathbb{N}_1 \to G$ eine Funktion. Die Funktion $F : \mathbb{N}_1 \to G$ werde definiert durch $F(n) := \prod_{d|n} f(d)$. Man beweise

$$f(n) = \prod_{d|n} F\Big(\frac{n}{d}\Big)^{\mu(d)}.$$
