Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

WS 2014/15
17. Okt. 2014

# Dirichletreihen und Zetafunktionen

## Übungsblatt 2

**Aufgabe 5** Man beweise folgende Darstellungen für die Euler-Mascheronische Konstante:

a) $$\gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \Big\{ \frac{1}{n} - \log\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) \Big\},$$

b) $$\gamma = 1 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\zeta(k) - 1\right).$$

**Aufgabe 6** Man beweise:

a) $$\lim_{x\to\infty} \sum_{x<n\leqslant 2x} \frac{1}{n} = \log 2,$$

b) $$\lim_{x\to\infty} \sum_{x<p\leqslant x^2} \frac{1}{p} = \log 2.$$

**Aufgabe 7**

a) Für $x \in \mathbb{R}_+$ und $t \in \mathbb{R}$ sei $\quad S(x,t) := \sum_{1\leqslant n\leqslant x} e^{int}$.

Man zeige: Zu jedem $\delta$ mit $0 < \delta < \pi$ existiert eine Konstante $K = K(\delta) > 0$, so dass

$$|S(x,t)| \leqslant K \text{ für alle } x > 0 \text{ und alle } t \in [\delta, 2\pi - \delta].$$

b) Man beweise mittels Abelscher partieller Summation: Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{int}}{n}$$

konvergiert gleichmäßig auf jedem Intervall $[\delta, 2\pi - \delta]$, $0 < \delta < \pi$.

**Aufgabe 8**

Man beweise: Die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+it}}$ divergiert für alle $t \in \mathbb{R}$.