MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
PROF. DR. O. FORSTER

SS 2014
2. Juli 2014

Algebraische Zahlentheorie

Übungsblatt 12

Aufgabe 45

Sei $K := \mathbb{Q}(\zeta)$, $\zeta := e^{2\pi i/p}$, wobei p eine ungerade Primzahl ist.

Man beweise: $\mathbb{Q}(\sqrt{p}) \subset K$, falls $p \equiv 1 \bmod 4$, und $\mathbb{Q}(\sqrt{-p}) \subset K$, falls $p \equiv 3 \bmod 4$.

Anleitung: Man zeige für das Element

$$S := \sum_{k=1}^{p-1} \left(\frac{k}{p}\right) \zeta^k \in \mathbb{Q}(\zeta).$$

die Gleichung $S^2 = (-1)^{(p-1)/2} p$.

Aufgabe 46

Sei $K := \mathbb{Q}(\sqrt{-7}) \subset L := \mathbb{Q}(e^{2\pi i/7})$. Man zeige, dass $\mathfrak{O}_L$ ein freier $\mathfrak{O}_K$-Modul vom Rang 3 ist, d.h. es existieren K-linear unabhängige Elemente $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \mathfrak{O}_L$, so dass

$$\mathfrak{O}_L = \sum_{j=1}^{3} \mathfrak{O}_K \cdot \omega_j.$$

Man bestimme explizit solche Elemente ω_j.

Aufgabe 47

Man betrachte die vier Ringe

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-7}] \ \subset \ \mathbb{Z}[\tfrac{1+\sqrt{-7}}{2}] \ \subset \ \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}, \sqrt{-7}] \ \subset \ \mathbb{Q}[\sqrt{-7}].$$

Welche davon sind Dedekind-Ringe?

Aufgabe 48

Sei A ein Noetherscher Integritätsbereich. Man beweise:

a) Genau dann ist A normal, wenn alle Lokalisierungen $A_\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m} \in \mathrm{Specm}(A)$, normal sind.

b) Für die Krull-Dimension gilt:

$$\dim_{\mathrm{Kr}} A = \sup\{\dim_{\mathrm{Kr}} A_\mathfrak{m} : \mathfrak{m} \in \mathrm{Specm}(A)\}.$$