Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

SS 2014
25. Juni 2014

Algebraische Zahlentheorie
Übungsblatt 11

Aufgabe 41

Sei $K = \mathbb{Q}(\theta)$ ein algebraischer Zahlkörper vom Grad n und $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ das Minimalpolynom von θ. Man beweise

$$\operatorname{discr}(1, \theta, \ldots, \theta^{n-1}) = (-1)^{n(n-1)/2} \mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(f'(\theta)).$$

Aufgabe 42

Für den kubischen Zahlkörper $K := \mathbb{Q}(\theta)$, $\theta := \sqrt[3]{2}$, mit Ganzheitsring $\mathfrak{O}_K = \mathbb{Z}[\theta]$ beweise man: Die Primzahlen 2 und 3 sind voll verzweigt, genauer gilt

$$2\mathbb{Z}[\theta] = (2) = (\theta)^3, \qquad 3\mathbb{Z}[\theta] = (3) = (1+\theta)^3,$$

sowie $\mathbb{Z}[\theta]/(\theta) \cong \mathbb{F}_2$ und $\mathbb{Z}[\theta]/(1+\theta) \cong \mathbb{F}_3$.

Aufgabe 43

Für das Zerlegungs-Verhalten von rationalen Primzahlen $p \geqslant 5$ im kubischen Zahlkörper $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ beweise man: Es tritt genau einer der folgenden drei Fälle ein:

1. Fall: $3 \nmid p - 1$.

Dann gilt $(p) = \mathfrak{p}\mathfrak{q}$ mit Primidealen $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \subset \mathfrak{O}_K$, so dass $\mathfrak{O}_K/\mathfrak{p} \cong \mathbb{F}_p$ und $\mathfrak{O}_K/\mathfrak{q} \cong \mathbb{F}_{p^2}$.

2. Fall: $3 \mid p - 1$ und 2 ist kubischer Rest modulo p, d.h. die Kongruenz $x^3 \equiv 2 \bmod p$ ist lösbar.

Dann gilt $(p) = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$ mit Primidealen $\mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{O}_K$, so dass $\mathfrak{O}_K/\mathfrak{p}_i \cong \mathbb{F}_p$.

3. Fall: $3 \mid p - 1$ und 2 ist kein kubischer Rest modulo p.

Dann ist p träge, d.h. ein Primelement von $\mathfrak{O}_K$ und $\mathfrak{O}_K/(p) \cong \mathbb{F}_{p^3}$.

Man gebe für jeden der 3 Fälle ein Beispiel an.

Aufgabe 44

Sei $L := \mathbb{Q}(\zeta_5)$, wobei $\zeta_5 := e^{2\pi i/5}$, und $K := \mathbb{Q}(\zeta_5 + \zeta_5^{-1}) \subset L$.

a) Man zeige $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ und $\mathfrak{O}_K = \mathfrak{O}_L \cap K$.

b) Man zerlege die Primzahlen $p = 2, 3, 5, 11, 19$ in ein Produkt von Primelementen

(i) im Ring $\mathfrak{O}_K$, (ii) im Ring $\mathfrak{O}_L$,

und vergleiche die Zerlegungen.