Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

SS 2014
11. Juni 2014

Algebraische Zahlentheorie
Übungsblatt 9

Aufgabe 33

Man beweise, dass der quadratische Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{-31})$ die Klassenzahl 3 hat und gebe ganze Ideale $\mathfrak{a}_i$, $i = 1, 2, 3$, als Repräsentanten der Idealklassen an.

Aufgabe 34

a) Mithilfe der Kettenbruch-Entwicklung von $\sqrt{31}$ zeige man, dass alle Primideale $\mathfrak{p} \subset \mathbb{Z}[\sqrt{31}]$ mit $\mathrm{N}(\mathfrak{p}) < \sqrt{31}$ Hauptideale sind.

b) Man folgere aus a), dass $\mathbb{Q}(\sqrt{31})$ die Klassenzahl 1 hat.

Aufgabe 35

Sei $p \geqslant 7$ eine quadratfreie ganze Zahl mit $p \equiv 3 \bmod 4$.

Man beweise: Hat $K := \mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ die Klassenzahl 1, so ist p eine Primzahl.

Anleitung. Aus einer Zerlegung $p = k\ell$ mit $1 < k < \ell$ konstruiere man ein reduziertes Ideal $(a, \frac{b+\sqrt{-p}}{2})_{\mathbb{Z}} \subset \mathfrak{O}_K$, das nicht dem Einheitsideal äquivalent ist.

Aufgabe 36

Sei $p \geqslant 7$ quadratfrei mit $p \equiv 3 \bmod 4$, $q := \frac{p+1}{4}$ und $\omega := \frac{1+\sqrt{-p}}{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{-p})$. Man beweise:

a) Für jedes $x \in \mathbb{Q}$ gilt $f(x) := x^2 + x + q = \mathrm{N}(x + \omega)$.

b) Falls $f(n) = n^2 + n + q$ prim ist für alle ganzen Zahlen n mit $0 \leqslant n < \sqrt{q/3}$, so hat $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ die Klassenzahl 1. Welche Zahlen $q < 100$ erfüllen diese Voraussetzung?
Hinweis. Man untersuche, welche reduzierten Ideale es geben kann.

Für c) und d) werde vorausgesetzt, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ die Klassenzahl 1 hat (also p prim ist).
c) Jede Primzahl $\ell < q$ ist träge in $\mathbb{Z}[\omega]$.
Hinweis. Würde ℓ spalten, gäbe es ein Primelement $\pi \in \mathbb{Z}[\omega]$ mit $\mathrm{N}(\pi) = \ell$.

d) $f(n) = n^2 + n + q$ ist prim für $n = 0, 1, 2, \ldots, q - 2$; insbesondere ist q prim.
Anleitung. Man beweise dazu: Ist ℓ ein Primteiler von $f(n)$, so ist $(\ell, n + \omega)_{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{Z}[\omega]$ ein ganzes Ideal mit Norm ℓ.

Bemerkung. Aus b) und d) folgt:
Ist $f(n) = n^2 + n + q$ prim für $0 \leqslant n < \sqrt{q/3}$, so ist $f(n)$ sogar prim für alle $0 \leqslant n \leqslant q - 2$.

Abgabetermin: Freitag, 20. Juni 2014, 15 Uhr