Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

SS 2014
4. Juni 2014

Algebraische Zahlentheorie

Übungsblatt 8

Aufgabe 29

Sei A ein Integritätsbereich mit $\mathbb{Z} \subset A$ (z.B. A = Maximalordnung eines algebraischen Zahlkörpers). Seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset A$ zwei Ideale der Form

$$\mathfrak{a} = (a, \gamma), \quad \mathfrak{b} = (b, \gamma) \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{Z},\ \gcd(a, b) = 1, \quad \gamma \in A.$$

Man zeige: $\quad \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{b} = (ab, \gamma)$.

Aufgabe 30

Im Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ zerlege man das Hauptideal

$$\mathfrak{a} := (13 + 7\sqrt{-5})$$

in ein Produkt von Primidealen.

Aufgabe 31

a) Gegeben sei das Ideal $\mathfrak{a} := (30, 7 + 4\sqrt{-6}) \subset \mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$.
Man bestimme eine Basis des Ideals $\mathfrak{a}$ als $\mathbb{Z}$-Modul in der Form $\mathfrak{a} = (\alpha, \beta + \gamma\sqrt{-6})_{\mathbb{Z}}$ mit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$. Ist $\mathfrak{a}$ ein Hauptideal oder ein Primideal?

b) Analoge Fragestellung für das Ideal $\mathfrak{b} := (30, 7 + 4\sqrt{6}) \subset \mathbb{Z}[\sqrt{6}]$.

Aufgabe 32

Gegeben sei die binäre quadratische Form

$$f(X, Y) = aX^2 + bXY + cY^2, \qquad a, b, c \in \mathbb{Z}, \quad \gcd(a, b, c) = 1.$$

Man zeige: Zu jeder ganzen Zahl $t \neq 0$ gibt es $x, y \in \mathbb{Z}$, so dass $f(x, y)$ zu t teilerfremd ist.

Abgabetermin: Freitag, 13. Juni 2014, 15 Uhr