Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

SS 2014
28. Mai 2014

Algebraische Zahlentheorie

Übungsblatt 7

Aufgabe 25

Man gebe eine notwendige und hinreichende Bedingungen dafür an, dass sich eine ganze Zahl $n > 0$ in der Form

$$n = x^2 + 2y^2 \qquad \text{bzw.} \qquad n = x^2 + 3y^2 \qquad \text{mit } x, y \in \mathbb{Z}$$

darstellen lässt.

Aufgabe 26

Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, ($d > 1$ quadratfrei), ein reell-quadratischer Zahlkörper und $\mathfrak{O}_K$ sein Ganzheitsring. Sei

$$G(d) := \{x \in \mathfrak{O}_K^* : x > 0\}$$

die Gruppe der positiven Einheiten von $\mathfrak{O}_K$ und sei $G_{\mathbb{Z}}(d) := G(d) \cap \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. Man zeige:

a) Falls $d \not\equiv 5 \bmod 8$, gilt $G_{\mathbb{Z}}(d) = G(d)$.

b) Falls $G_{\mathbb{Z}}(d) \neq G(d)$, definiert die Abbildung $x \mapsto x^3$ einen Isomorphismus von $G(d)$ auf $G_{\mathbb{Z}}(d)$.

Aufgabe 27 (Fortsetzung von Aufgabe 25)

Seien weitere Untergruppen von $G(d)$ definiert durch

$$G_1(d) := \{x \in G(d) : \mathrm{N}(x) = 1\} \quad \text{und} \quad G_{\mathbb{Z},1}(d) := G_{\mathbb{Z}}(d) \cap G_1(d).$$

a) Man zeige: Falls $G(d) \neq G_1(d)$, liefert die Abbildung $x \mapsto x^2$ Isomorphismen

$$G(d) \to G_1(d) \quad \text{und} \quad G_{\mathbb{Z}}(d) \to G_{\mathbb{Z},1}(d).$$

b) Für den Index der Untergruppe $G_{\mathbb{Z},1}(d) \subset G(d)$ gilt

$$[G(d) : G_{\mathbb{Z},1}(d)] \in \{1, 2, 3, 6\}.$$

Man gebe für alle möglichen Fälle ein Beispiel mit $d \equiv 1 \bmod 4$.

Aufgabe 28

Im Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$ betrachte man die Ideale $\mathfrak{a} := (2, \sqrt{10})$ und $\mathfrak{b} := (3, 1 + \sqrt{10})$.

a) Man zeige, dass $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ keine Hauptideale sind.

b) Man berechne $\mathfrak{a}^2$ und $\mathfrak{ab}$ und zeige, dass sie Hauptideale sind.

c) Man bestimme ein $\lambda \in \mathbb{Q}(\sqrt{10})$, so dass $\mathfrak{b} = \lambda\mathfrak{a}$.

Abgabetermin: Freitag, 6. Juni 2014, 15 Uhr