Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

SS 2014
14. Mai 2014

Algebraische Zahlentheorie

Übungsblatt 5

Aufgabe 17

Sei Λ ein Gitter in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$, d.h. $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$, wobei $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ linear unabhängig über $\mathbb{R}$ sind. Man sagt, Λ sei ein Gitter mit *komplexer Multiplikation*, wenn es ein $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ gibt mit $\alpha\Lambda \subset \Lambda$.

Man beweise: Genau dann hat Λ komplexe Multiplikation, wenn $\tau := \omega_2/\omega_1$ einem imaginär-quadratischen Zahlkörper K angehört.

Aufgabe 18

Sei K ein quadratischer Zahlkörper und $\Lambda \subset K$ ein Gitter, d.h. $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$, wobei $\omega_1, \omega_2 \in K$ linear unabhängig über $\mathbb{Q}$ sind. Sei

$$R := R(\Lambda) := \{\xi \in K : \xi\Lambda \subset \Lambda\}.$$

Man beweise:

a) R ist ein Unterring $R \subset \mathfrak{O}_K$ der Maximalordnung von K (eine sog. *Ordnung* von K).

b) Es gibt eine ganze Zahl $f \geqslant 1$ mit $f\mathfrak{O}_K \subset R$. Das kleinst-mögliche f heißt *Führer* der Ordnung.

c) Jedes $f \geqslant 1$ kommt als Führer einer geeigneten Ordnung von K vor.

Aufgabe 19

Seien Λ_1, Λ_2 Gitter in einem quadratischen Zahlkörper K. Die Gitter heißen *ähnlich*, wenn es ein $\alpha \in K^*$ gibt mit $\Lambda_2 = \alpha\Lambda_1$.

a) Man beweise: Sind Λ_1 und Λ_2 ähnlich, so gilt $R(\Lambda_1) = R(\Lambda_2)$.

b) Man zeige an einem Beispiel, dass aus $R(\Lambda_1) = R(\Lambda_2)$ nicht notwendig folgt, dass Λ_1 und Λ_2 ähnlich sind.

Aufgabe 20

Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, ($d \neq 0, 1$ quadratfrei), ein quadratischer Zahlkörper und $p \nmid d$ eine ungerade Primzahl mit $(\frac{d}{p}) = 1$. Sei $x \in \mathbb{Z}$ eine Lösung der Kongruenz $x^2 \equiv d \bmod p$ und $\mathfrak{P}$ das von den Elementen p und $x + \sqrt{d}$ in der Maximalordnung $\mathfrak{O}_K$ erzeugte Ideal.

a) Man beweise: Ist $d \equiv 2, 3 \bmod 4$, so ist $\mathfrak{P}$ gleich dem von p und $x + \sqrt{d}$ erzeugten Gitter in K, d.h. $\mathfrak{P} = \mathbb{Z} \cdot p + \mathbb{Z} \cdot (x + \sqrt{d})$.

b) Im Fall $d \equiv 1 \bmod 4$ gebe man eine Gitterbasis von $\mathfrak{P}$ an, d.h. Elemente $\omega_1, \omega_2 \in \mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{P} = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$.

Abgabetermin: Freitag, 23. Mai 2014, 15 Uhr