Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

SS 2014
6. Mai 2014

Algebraische Zahlentheorie
Übungsblatt 4

Aufgabe 13

Gegeben seien die Elemente $z_1 := 8 + i$ und $z_2 := 10 + 11i$ des Rings $\mathbb{Z}[i]$ der ganzen Gaußschen Zahlen. Man bestimme den (bis auf eine Einheit eindeutig bestimmten) größten gemeinsamen Teiler t_1 von z_1 und z_2 bzw. t_2 von z_1 und $\overline{z}_2$.

Aufgabe 14

a) Man erstelle eine Liste aller Primelemente $\pi \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ mit $|\mathbb{N}(\pi)| \leqslant 25$. Dabei gebe man von jeder Äquivalenzklasse assoziierter Primelemente nur einen Repräsentanten an.

b) Gibt es im Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ außer den trägen rationalen Primzahlen noch weitere Primelemente? Wenn ja, welche?

Aufgabe 15

Wie in der Vorlesung bewiesen wird, ist der Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{6}]$ faktoriell. Die Existenz zweier verschiedener Zerlegungen des Elementes $6 \in \mathbb{Z}[\sqrt{6}]$,

$$6 = 2 \cdot 3 = \sqrt{6} \cdot \sqrt{6},$$

scheint dem zu widersprechen. Man kläre den Sachverhalt auf.

Aufgabe 16

a) Man beweise, dass der Ring $\mathbb{Z}[\frac{1}{3}\sqrt{2}]$ faktoriell ist.

b) Man zeige, dass $\mathbb{Z}[\frac{1}{3}\sqrt{2}]$ nicht ganz-algebraisch über $\mathbb{Z}$ ist und dass die induzierte Abbildung

$$\operatorname{Specm}(\mathbb{Z}[\tfrac{1}{3}\sqrt{2}]) \to \operatorname{Specm}(\mathbb{Z})$$

nicht surjektiv ist. Welche Primideale liegen über $(2), (3), (5), (7), (11) \in \operatorname{Specm}(\mathbb{Z})$?

Abgabetermin: Freitag, 16. Mai 2014, 15 Uhr