Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

SS 2014
30. April 2014

Algebraische Zahlentheorie

Übungsblatt 3

Aufgabe 9

Sei $d \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0,1\}$ quadratfrei mit $d \equiv 1 \bmod 4$.
Man zeige, dass der Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ nicht faktoriell ist.

Aufgabe 10

Sei $A := \mathfrak{O}_K$ der Ganzheitsring eines quadratischen Zahlkörpers K. Man zeige:
Sind $x, y \in A \smallsetminus \{0\}$ assoziiert (d.h. $x \mid y$ und $y \mid x$), so folgt $|\mathrm{N}(x)| = |\mathrm{N}(y)|$.
Gilt auch die Umkehrung? (Beweis oder Gegenbeispiel!)

Aufgabe 11

Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, $d > 1$ quadratfrei, ein reell-quadratischer Zahlkörper und $A := \mathfrak{O}_K$ sein Ganzheitsring.

a) Es gebe eine Einheit $u \in A^*$ mit $\mathrm{N}(u) = -1$. Man zeige, dass dann jeder ungerade Primfaktor $p \mid d$ die Kongruenz $d \equiv 1 \bmod 4$ erfüllt.

b) Man gebe Beispiele von Einheiten $u \in A^*$ mit $\mathrm{N}(u) = -1$ in den Fällen

$$d = 5, 10, 13, 41, 85.$$

Aufgabe 12

Im Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$ betrachte man die Zerlegungen

$$15 = 3 \cdot 5 = (5 + \sqrt{10})(5 - \sqrt{10}).$$

a) Man beweise, dass die Elemente $3, 5$ und $5 \pm \sqrt{10}$ in $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$ irreduzibel und paarweise nicht assoziiert sind. Man folgere daraus, dass der Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$ nicht faktoriell ist.

b) Man zerlege die Hauptideale (3), (5), $(5 + \sqrt{10})$ und $(5 - \sqrt{10})$ im Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$ jeweils in ein Produkt von Primidealen.

Abgabetermin: Freitag, 9. Mai 2014, 15 Uhr