Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

SS 2014
11. April 2014

Algebraische Zahlentheorie
Übungsblatt 1

Aufgabe 1

Sei A ein Ring (wie immer: kommutativ, mit Einselement). Man zeige: Ein Element $z \in A$ gehört genau dann zum Jacobson-Radikal von A, wenn gilt:

$$1 + xz \quad \text{ist invertierbar für alle } x \in A.$$

Aufgabe 2

Sei X eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ (oder allgemeiner ein beliebiger kompakter Hausdorff-Raum) und $A := \mathcal{C}(X)$ der Ring aller stetigen Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$. Für $x \in X$ sei $\mathfrak{m}_x := \{f \in \mathcal{C}(X) : f(x) = 0\}$. Man zeige: $\mathfrak{m}_x$ ist ein maximales Ideal von A und die Abbildung

$$X \to \operatorname{Specm}(A), \qquad x \mapsto \mathfrak{m}_x,$$

ist bijektiv.

Anleitung. Man beweise dazu: Sind $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{C}(X)$ Funktionen ohne eine gemeinsame Nullstelle, so ist das von ihnen erzeugte Ideal der ganze Ring.

Aufgabe 3

Man bestimme die p-adischen Entwicklungen der rationalen Zahlen $a := 1/3$ und $b := -1/5$ für $p = 2$ und $p = 7$.

Aufgabe 4

Sei $p \geqslant 3$ eine Primzahl.

a) Man zeige: Zu jedem $a \in \mathbb{F}_p^*$ gibt es genau eine ganze p-adische Zahl $\zeta \in \mathbb{Z}_p = \widehat{\mathbb{Z}}_{(p)}$ mit

$$\zeta^{p-1} = 1 \quad \text{und} \quad \zeta \equiv a \bmod (p)$$

Anleitung. Ausgehend von $\zeta_0 := a$ konstruiere man rekursiv eine Folge $\zeta_k \in \mathbb{Z}$, $k \geqslant 0$, mit $\zeta_k \equiv \zeta_{k-1} \bmod p^k$ und $\zeta_k^{p-1} \equiv 1 \bmod p^{k+1}$.

b) Für $p = 5$ und $a = 2$ bestimme man explizit die p-adische Entwicklung von ζ bis einschließlich Ordnung 6.

Abgabetermin: Mittwoch, 23. April 2014, 15 Uhr