2. Ganz-algebraische Erweiterungen. Überlagerungen

Sei $B \supset A$ eine Ring-Erweiterung. Für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset B$ ist dann, wie man leicht nachrechnet, das Ideal $\mathfrak{p} \cap A$ ein Primideal von A. Die Inklusion $j : A \hookrightarrow B$ induziert deshalb eine Abbildung

$$j^* : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A), \qquad \mathfrak{p} \mapsto j^*(\mathfrak{p}) := \mathfrak{p} \cap A.$$

Umgekehrt kann man fragen: Gibt es zu einem vorgebebenen Primideal $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal $\mathfrak{P} \subset B$, so dass $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap A$ (man sagt dann, $\mathfrak{P}$ *liegt über* $\mathfrak{p}$). Im Allgemeinen ist das nicht der Fall, wie das Beispiel $\mathbb{Q} \supset \mathbb{Z}$ zeigt. Wir werden aber sehen, dass für sog. ganz-algebraische Erweiterungen $B \supset A$ über jedem Primideal $\mathfrak{p} \subset A$ (mindestens) ein Primideal $\mathfrak{P} \subset B$ liegt, d.h. die induzierte Abbildung $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ surjektiv ist.

2.1. Definition. Sei $B \supset A$ eine Ring-Erweiterung. Ein Element $x \in B$ heißt *ganz-algebraisch* (oder kurz *ganz*) über A, falls ein normiertes Polynom

$$f(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + \ldots + a_n \in A[X]$$

existiert mit $f(x) = 0$. Die Erweiterung $B \supset A$ heißt ganz-algebraisch, falls jedes Element $x \in B$ ganz über A ist.

2.2. Adjungierte Matrix. Für den Beweis des nächsten Satzes benötigen wir einen Begriff aus der der linearen Algebra. Sei $C = (c_{ij})$ eine $(n \times n)$-Matrix mit Koeffizienten $c_{ij} \in R$ aus einem kommutativen Ring R. Dann versteht man unter der *adjungierten* Matrix von C die $(n \times n)$-Matrix $C^{\#} = (\gamma_{ij})$ mit den Koeffizienten

$$\gamma_{ij} := (-1)^{i+j} \det C_{ji},$$

wobei C_{ji} die $(n-1)$-reihige Matrix ist, die aus der Matrix C durch Streichung der j-ten Zeile und i-ten Spalte entsteht. (Falls $n = 1$, sei $C^{\#} = (1)$). Es gilt

$$C^{\#} C = (\det C) E, \qquad (E \text{ ist die } n\text{-reihige Einheitsmatrix}),$$

wie aus der Cramerschen Regel folgt.

2.3. Satz. *Sei $B \supset A$ eine Ring-Erweiterung und $x \in B$. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:*

(i) *x ist ganz über A.*

(ii) *Der Unterring $A[x] \subset B$ ist ein endlich erzeugter A-Modul.*

(iii) *Es gibt einen Unterring $R \subset B$, der als A-Modul endlich erzeugt ist, mit $x \in R$.*

(iv) *Es gibt einen endlich erzeugten A-Modul M mit $A \subset M \subset B$, so dass $xM \subset M$.*

Beweis. Wir zeigen die Implikationen (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (i).

(i) $\Rightarrow$ (ii). Genügt x einer Gleichung

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad \text{mit } a_j \in A,$$

so folgt $A[x] = A \cdot 1 + Ax + \ldots + Ax^{n-1}$, denn jede Potenz x^m mit $m \geqslant n$ lässt sich durch niedrigere Potenzen ausdrücken. Also ist $A[x]$ ein endlich erzeugter A-Modul.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Man kann $R = A[x]$ wählen.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Man kann $M = R$ wählen.

(iv) $\Rightarrow$ (i). Sei $M = Ab_1 + Ab_2 + \ldots + Ab_n$ mit $b_j \in B$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $b_1 = 1$. Da $xM \subset M$, gibt es Koeffizienten $a_{ij} \in A$ mit

$$xb_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_j \quad \text{für } j = 1, \ldots, n$$

In Matrix-Schreibweise heißt das

$$x\vec{b} = T\vec{b} \qquad \text{oder} \qquad (xE - T)\vec{b} = 0,$$

wobei $\vec{b}$ den Spaltenvektor mit den Komponenten b_i bezeichnet; T die $(n \times n)$-Matrix mit den Koeffizienten a_{ij} und E die n-reihige Einheitsmatrix. Wir multiplizieren nun die letzte Gleichung von links mit der adjungierten Matrix $(xE - T)^{\#}$ und erhalten $\det(xE - T)\vec{b} = 0$, also $\det(xE - T) = 0$ (da $b_1 = 1$). Entwicklung der Determinante von $xE - T$ liefert dann eine Gleichung

$$x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1}x + \alpha_n = 0 \qquad \text{mit } \alpha_j \in A,$$

was zeigt, dass x ganz über A ist, q.e.d.

2.4. Corollar. *Sei $B \supset A$ eine Ring-Erweiterung und seien $x, y \in B$ zwei Elemente, die ganz über A sind. Dann sind auch die Summe $x + y$ und das Produkt xy ganz über A. Insbesondere ist die Menge*

$$B_1 := \{x \in B : x \text{ ganz über } A\}$$

ein Unterring von B.

Beweis. Da x und y ganz sind, gilt mit gewissen natürlichen Zahlen $n, m > 0$, das

$$A[x] = \sum_{i=0}^{n-1} Ax^i \quad \text{und} \quad A[y] = \sum_{j=1}^{m-1} Ay^j.$$

Daraus folgt, dass der Ring

$$R := A[x, y] = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} Ax^i y^j.$$

ein endlich-erzeugter A-Modul ist. Da $x + y, xy \in R$, folgt aus Satz 2.3, dass $x + y$ und xy ganz über A sind. Da also die ganzen Elemente von B abgeschlossen gegenüber Summen und Produkten sind, bilden sie einen Ring.

2.5. Satz. *Sei $A \subset B \subset C$ eine Kette von Ring-Erweiterungen. Ist B ganz über A und C ganz über B, so ist C ganz über A.*

Beweis. Sei $z \in C$ ein beliebiges Element. Da z ganz über B ist, genügt es einer Gleichung

$$z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_{n-1} z + b_n = 0 \quad \text{mit } b_i \in B.$$

Sei $B_1 \subset B$ der Ring $B_1 := A[b_1, \ldots, b_n]$ und

$$R := B_1[z] = \sum_{i=1}^{n-1} B_1 z^i.$$

Da jedes b_i ganz über A ist, ist B_1 ein endlich erzeugter A-Modul. Daraus folgt, dass auch R ein endlich erzeugter A-Modul ist. Nach Satz 2.3 ist z ganz über A, q.e.d.

Ist $A \subset B$ eine Ring-Erweiterung und $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal, so bezeichnen wir mit $B\mathfrak{a}$ das von $\mathfrak{a}$ in B erzeugte Ideal. Es besteht aus allen endlichen Summen $\sum_{i=1}^{r} b_i a_i$ mit $a_i \in \mathfrak{a}$, $b_i \in B$.

2.6. Satz. *Sei $B \supset A$ eine ganz-algebraische Ring-Erweiterung und $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal. Dann gilt $B\mathfrak{p} \cap A = \mathfrak{p}$.*

Bemerkung. Das Ideal $B\mathfrak{p} \subset B$ ist im Allgemeinen kein Primideal.

Beweis. Da B ein Einselement hat, ist die Inklusion $\mathfrak{p} \subset B\mathfrak{p} \cap A$ trivial. Daher müssen wir nur beweisen, dass $B\mathfrak{p} \cap A \subset \mathfrak{p}$.

(i) Wir behandeln zunächst den Fall, dass der Ring B ein endlich erzeugter A-Modul ist, etwa

$$B = \sum_{i=1}^{m} Ab_i \quad \text{mit} \quad b_1, \ldots, b_m \in B.$$

O.B.d.A. ist $b_1 = 1$. Sei nun $x \in B\mathfrak{p} \cap A$ ein beliebiges Element. Es lässt sich schreiben als $x = \sum_{j=1}^{m} p_j b_j$ mit $p_j \in \mathfrak{p}$. Dann hat man für $i = 1, \ldots, m$

$$xb_i = \sum_{j=1}^{m} \pi_{ij} b_j \qquad \text{mit} \quad \pi_{ij} \in \mathfrak{p}.$$

In Matrix-Schreibweise heißt das

$$x\vec{b} = P\vec{b} \qquad \text{oder} \qquad (xE - P)\vec{b} = 0,$$

wobei $\vec{b}$ den Spaltenvektor mit den Komponenten b_i bezeichnet; P die $(m \times m)$-Matrix $P = (\pi_{ij})$ und E die m-reihige Einheitsmatrix. Nun multiplizieren wir die letzte Gleichung mit der adjungierten Matrix $(xE-P)^{\#}$. Da $(xE-P)^{\#}(xE-P) = \det(xE-P)E$, erhalten wir

$$\det(xE - P) \cdot \vec{b} = 0 \quad \Rightarrow \quad \det(xE - P) = 0.$$

Entwicklung der Determinante ergibt eine Gleichung

$$x^m + c_1 x^{m-1} + \ldots + c_m = 0,$$

wobei die Koeffizienten c_j Polynome vom Grad j in den Matrixelementen $\pi_{\nu\mu}$ sind, d.h. $c_j \in \mathfrak{p}$. Daraus folgt $x^m \in \mathfrak{p}$, und da $\mathfrak{p}$ prim ist, sogar $x \in \mathfrak{p}$, q.e.d.

(ii) Im allgemeinen Fall ist B Vereinigung von Unterringen $B' \subset B$, die endlich erzeugte A-Moduln sind. Daher ist $B\mathfrak{p}$ Vereinigung aller $B'\mathfrak{p}$. Da $B'\mathfrak{p} \cap A \subset \mathfrak{p}$, folgt $B\mathfrak{p} \cap A \subset \mathfrak{p}$.

2.7. Definition. Eine Teilmenge $S \subset A$ eines Rings heißt *multiplikativ abgeschlossen*, falls gilt:

(i) $1 \in S$,

(ii) $s, t \in S \Rightarrow st \in S$.

Ein Ideal $\mathfrak{p} \subset A$ ist nach Definition genau dann ein Primideal, wenn das Komplement $A \setminus \mathfrak{p}$ multiplikativ abgeschlossen ist.

2.8. Lemma. *Sei A ein Ring, $S \subset A$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge und $\mathfrak{a}_0 \subset A$ ein Ideal mit $\mathfrak{a}_0 \subset A \setminus S$. Sei Σ die Gesamtheit aller Ideale $\mathfrak{a} \subset A$ mit $\mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{a} \subset A \setminus S$. Sei $\mathfrak{p} \in \Sigma$ ein maximales Element, d.h. für jedes $\mathfrak{b} \in \Sigma$ mit $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{b}$ folgt $\mathfrak{p} = \mathfrak{b}$. Dann ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal von A.*

Bemerkung. Aus dem Zornschen Lemma folgt die Existenz eines (nicht notwendig eindeutig bestimmten) maximalen Elements $\mathfrak{p} \in \Sigma$.

Beweis. Seien $x, y \in A$ Elemente mit $xy \in \mathfrak{p}$. Wir müssen zeigen, dass mindestens eines der Elemente x, y in $\mathfrak{p}$ liegt.
Angenommen, dies sei nicht der Fall, d.h. $x \notin \mathfrak{p}$ und $y \notin \mathfrak{p}$. Wir definieren Ideale

$$\mathfrak{b}_1 := \mathfrak{p} + Ax \quad \text{und} \quad \mathfrak{b}_2 := \mathfrak{p} + Ay.$$

Aufgrund der Maximalität von $\mathfrak{p}$ ist dann $\mathfrak{b}_i \notin \Sigma$, d.h. $\mathfrak{b}_i \cap S \neq \emptyset$. Daher existieren Elemente $p_i \in \mathfrak{p}$, $a_i \in A$ mit

$$p_1 + a_1 x =: s_1 \in S \quad \text{und} \quad p_2 + a_2 y =: s_2 \in S.$$

Es gilt $s_1 s_2 \in S$. Andrerseits ist

$$s_1 s_2 = (p_1 + a_1 x)(p_2 + a_2 y) = p_1 p_2 + p_1 a_2 y + p_2 a_1 x + a_1 a_2 xy \in \mathfrak{p},$$

da $xy \in \mathfrak{p}$. Dies steht im Widerspruch zu $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$. Also war die Annahme falsch und damit das Lemma bewiesen.

2.9. Satz. *Sei $A \subset B$ eine ganz-algebraische Ring-Erweiterung. Dann gibt es zu jedem Primideal $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal $\mathfrak{P} \subset B$ mit $\mathfrak{P} \cap A = \mathfrak{p}$.*

Bemerkungen. a) Der Satz bedeutet, dass die durch die Inklusion $A \subset B$ induzierte Abbildung

$$\operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A), \qquad \mathfrak{P} \mapsto \mathfrak{P} \cap A,$$

surjektiv ist.
b) Im Allgemeinen ist das Primideal $\mathfrak{P}$, das über $\mathfrak{p}$ liegt, nicht eindeutig bestimmt.

Beweis. Sei $S := A \setminus \mathfrak{p}$. Dann ist S eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von A, also auch von B. Aus Satz 2.6 folgt

$$B\mathfrak{p} \subset B \setminus S.$$

Sei Σ die Menge aller Ideale $\mathfrak{b} \subset B$ mit $B\mathfrak{p} \subset \mathfrak{b} \subset B \setminus S$ und sei $\mathfrak{P} \in \Sigma$ ein maximales Element. Nach Lemma 2.8 ist $\mathfrak{P}$ ein Primideal von B. Nach Definition gilt

$$\mathfrak{p} = B\mathfrak{p} \cap A \subset \mathfrak{P} \cap A \subset A \setminus S = \mathfrak{p},$$

und daher $\mathfrak{P} \cap A = \mathfrak{p}$, q.e.d.

Bezeichnung. Für Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ eines Rings A schreiben wir $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ als Abkürzung für $\mathfrak{a} \subsetneqq \mathfrak{b}$, d.h. $\mathfrak{a}$ ist eine echte Teilmenge von $\mathfrak{b}$.

2.10. Corollar. *Sei $A \subset B$ eine ganz-algebraische Ring-Erweiterung, $\mathfrak{P}_0 \subset B$ ein Primideal und $\mathfrak{p}_0 := \mathfrak{P}_0 \cap A$. Dann gibt es zu jedem Primideal $\mathfrak{p} \subset A$ mit $\mathfrak{p}_0 < \mathfrak{p}$ ein Primideal $\mathfrak{P} \subset B$ mit $\mathfrak{P}_0 < \mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P} \cap A = \mathfrak{p}$.*

Beweis. Wir definieren $A_0 := A/\mathfrak{p}_0$ und $B_0 := B/\mathfrak{P}_0$. Die Einbettungs-Abbildung $A \hookrightarrow B$ induziert eine injektive Abbildung $A_0 \to B_0$. Deshalb kann B_0 als ein Erweiterungsring von A_0 aufgefasst werden. Es ist klar, dass die Erweiterung $A_0 \subset B_0$ ganz-algebraisch ist. Das Primideal $\mathfrak{p} \subset A$ induziert ein Primideal

$$\mathfrak{p}' := \mathfrak{p}/\mathfrak{p}_0 \subset A_0.$$

Nach Satz 2.9 gibt es ein Primideal $\mathfrak{P}' \subset B_0$ mit $\mathfrak{P}' \cap A_0 = \mathfrak{p}'$. Sei

$$\pi : B \to B_0 = B/\mathfrak{P}_0$$

die kanonische Quotienten-Abbildung und $\mathfrak{P} := \pi^{-1}(\mathfrak{P}') \subset B$. Man prüft leicht nach, dass $\mathfrak{P}$ ein Primideal ist mit $\mathfrak{P}_0 < \mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P} \cap A = \mathfrak{p}$.

2.11. Satz. *Sei $A \subset B$ eine ganz-algebraische Ring-Erweiterung und seien*

$$\mathfrak{P}_1 < \mathfrak{P}_2 < B$$

Primideale in B. Dann gilt für die Primideale $\mathfrak{p}_i := \mathfrak{P}_i \cap A$ die Beziehung

$$\mathfrak{p}_1 < \mathfrak{p}_2 < A.$$

Beweis. Da die Inklusion $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2$ trivial ist, müssen wir nur zeigen, dass $\mathfrak{p}_1 \neq \mathfrak{p}_2$, d.h. dass ein Element $x \in \mathfrak{p}_2 \setminus \mathfrak{p}_1$ existiert.
Nach Voraussetuzng existiert ein Element $y \in \mathfrak{P}_2 \setminus \mathfrak{P}_1$. Da y ganz über A ist, gibt es ein normiertes Polynom $f(X) \in A[X]$ mit $f(y) = 0$. Also gibt es eine Beziehung der Gestalt

$$y^m + a_1 y^{m-1} + \ldots + a_{m-1} y + a_m \in \mathfrak{P}_1, \qquad a_j \in A, \tag{1}$$

von minimalem Grad $m \geqslant 1$. Dann gilt $a_m \notin \mathfrak{P}_1$, da andernfalls

$$y(y^{m-1} + a_1 y^{m-2} + \ldots + a_{m-1}) \in \mathfrak{P}_1,$$

woraus wegen $y \notin \mathfrak{P}_1$ folgen würde dass der Ausdruck in Klammern zu $\mathfrak{P}_1$ gehört, was der Minimalität von m widerspricht.
Daher ist $a_m \notin \mathfrak{P}_1 \cap A = \mathfrak{p}_1$. Aber aus (1) folgt auch $a_m \in \mathfrak{P}_1 + By \subset \mathfrak{P}_2$, also $a_m \in \mathfrak{p}_2 \setminus \mathfrak{p}_1$, q.e.d.

2.12. Satz. *Sei $B \supset A$ eine ganz-algebraische Ring-Erweiterung. Sei $\mathfrak{P} \subset B$ ein Primideal und $\mathfrak{p} := \mathfrak{P} \cap A$. Genau dann ist $\mathfrak{P}$ ein maximales Ideal von B, wenn $\mathfrak{p}$*

ein maximales Ideal von A ist. Insbesondere induziert die Inklusion $j : A \hookrightarrow B$ eine surjektive Abbildung

$$j^* : \mathrm{Specm}(B) \to \mathrm{Specm}(A), \quad \mathfrak{m} \mapsto \mathfrak{m} \cap A.$$

Beweis. a) Sei zunächst vorausgesetzt, dass das Ideal $\mathfrak{P} \subset B$ maximal ist. Wäre $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap A$ nicht maximal, gäbe es ein Primideal $\mathfrak{p}_1$ mit $\mathfrak{p} < \mathfrak{p}_1 < A$. Nach Corollar 2.10 gäbe es dann ein Primideal $\mathfrak{P}_1$ mit $\mathfrak{P} < \mathfrak{P}_1 < B$, also wäre $\mathfrak{P}$ nicht maximal, Widerspruch!

b) Ist $\mathfrak{P} \subset B$ nicht maximal, so folgt aus Satz 2.11, dass auch $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap A$ nicht maximal ist.

2.13. Definition (Krull-Dimension von Ringen). Ein Ring A hat *Krull-Dimension* n, in Zeichen $\dim_{\mathrm{Kr}} A = n$, wenn es in A eine Primideal-Kette

$$\mathfrak{p}_0 < \mathfrak{p}_1 < \ldots < \mathfrak{p}_n < A$$

der Länge n, aber keine längere Kette gibt. (Falls es Primideal-Ketten beliebiger Länge gibt, setzt man $\dim_{\mathrm{Kr}} A := \infty$.)

Danach hat ein Körper die Krull-Dimension 0. Ein Integritätsbereich A hat Krull-Dimension 1 genau dann, wenn A kein Körper ist und jedes Primideal $\mathfrak{p} \neq (0)$ von A ein maximales Ideal ist. Zum Beispiel haben der Ring $\mathbb{Z}$ und der Polynomring $K[X]$ in einer Unbestimmten X über einem Körper K die Krull-Dimension 1.

2.14. Theorem. *Sei $A \subset B$ eine ganz-algebraische Ring-Erweiterung. Dann gilt*

$$\dim_{\mathrm{Kr}} A = \dim_{\mathrm{Kr}} B.$$

Beweis. a) Ist $\mathfrak{P}_0 < \mathfrak{P}_1 < \ldots < \mathfrak{P}_n < B$ eine Primideal-Kette in B, dann erhalten wir mit $\mathfrak{p}_i := \mathfrak{P}_i \cap A$, eine Primideal-Kette

$$\mathfrak{p}_0 < \mathfrak{p}_1 < \ldots < \mathfrak{p}_n < A$$

im Ring A. Dies zeigt $\dim_{\mathrm{Kr}} A \geqslant \dim_{\mathrm{Kr}} B$.

b) Sei umgekehrt eine Primideal-Kette $\mathfrak{p}_0 < \mathfrak{p}_1 < \ldots < \mathfrak{p}_n < A$ in A gegeben. Durch wiederholte Anwendung von Satz 2.9 und Corollar 2.10 kann man diese Kette zu einer Primideal-Kette

$$\mathfrak{P}_0 < \mathfrak{P}_1 < \ldots < \mathfrak{P}_n < B$$

im Ring B liften. Dies zeigt $\dim_{\mathrm{Kr}} B \geqslant \dim_{\mathrm{Kr}} A$, q.e.d.

2.15. Definition. Unter einem *algebraischen Zahlkörper K* versteht man eine endliche Körper-Erweiterung des Körpers $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen, d.h.

$$[K : Q] := \dim_{\mathbb{Q}} K < \infty.$$

Eine Zahl $x \in K$ heißt *ganz-algebraisch* oder kurz *ganz*, wenn x ganz-algebraisch über $\mathbb{Z}$ ist. Die Menge R aller ganzen Zahlen aus K bilden nach Corollar 2.4 einen Ring, den sog. *Ganzheitsring* von K. Der Ganzheitsring heißt aus historischen Gründen auch die *Maximalordnung* von K und wird oft mit $\mathfrak{O}_K$ bezeichnet.

Bemerkung. Die ganzen Zahlen eines algebraischen Zahlkörpers verallgemeinern die üblichen ganzen Zahlen aus $\mathbb{Z}$. Will man betonen, dass man von von den üblichen ganzen Zahlen spricht, nennt man die Elemente von $\mathbb{Z}$ auch *ganz-rationale* Zahlen. Dass dies nicht zu Missverständnissen führen kann, zeigt der folgende Satz.

2.16. Satz. *Sei x eine ganze Zahl eines algebraischen Zahlkörpers $K \supset \mathbb{Q}$. Falls $x \in \mathbb{Q}$, gilt sogar $x \in \mathbb{Z}$.*

Der Inhalt des Satzes lässt sich kurz durch die Formel $\mathfrak{O}_K \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$ ausdrücken.

Beweis. Die Zahl x genügt einer Gleichung

$$x^n + c_1 x^{n-1} + \ldots + c_{n-1} x + c_n = 0 \qquad \text{mit } c_j \in \mathbb{Z}.$$

Da $x \in \mathbb{Q}$, lässt es sich schreiben als $x = t/q$ mit teilerfremden Zahlen $t, q \in \mathbb{Z}$. Setzt man dies in die obige Gleichung ein und multipliziert mit q^n, erhält man eine Gleichung

$$t^n + q(c_1 t^{n-1} + \ldots + c_{n-1} q^{n-2} t + c_n q^{n-1}) = 0.$$

Daraus folgt $q \mid t^n$. Da aber q und t teilerfremd sind, folgt $q = \pm 1$, also $x \in \mathbb{Z}$, q.e.d.

2.17. Satz. *Sei K ein algebraischer Zahlkörper und $\mathfrak{O}_K$ sein Ganzheitsring. Dann hat $\mathfrak{O}_K$ die Krull-Dimension 1 und die Inklusion $\mathbb{Z} \subset \mathfrak{O}_K$ induziert eine surjektive Abbildung*

$$\operatorname{Specm}(\mathfrak{O}_K) \to \operatorname{Specm}(\mathbb{Z}).$$

Dies folgt unmittelbar aus den Sätzen 2.12 und 2.14.