Riemannsche Flächen II

Übungsblatt 5

Aufgabe 17

Auf einer Riemannschen Fläche X sei L ein holomorphes Geradenbündel, das durch den Cozyklus $(g_{k\ell}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}^*)$ bzgl. einer offenen Überdeckung $\mathfrak{U} = (U_k)_{k\in I}$ gegeben sei. Eine differenzierbare *hermitesche Metrik* auf L wird gegeben durch eine Familie $(h_k)_{k\in I}$ von positiven differenzierbaren Funktionen $h_k : U_k \to \mathbb{R}_+^*$ mit

$$h_k = |g_{k\ell}|^{-2} h_\ell \quad \text{auf } U_k \cap U_\ell \ \text{ für alle } k, \ell \in I.$$

Ist $f = (f_k)$ ein Schnitt von L, $(f_k = g_{k\ell} f_\ell)$, so ist die Norm von f im Punkt $x \in X$ bzgl. dieser Metrik definiert durch

$$\|f(x)\|^2 := h_k(x)|f_k(x)|^2, \quad \text{wobei } x \in U_k.$$

Offenbar ist dies unabhängig von der Auswahl von $k \in I$ mit $x \in U_k$.

a) Man zeige: Jedes holomorphe Geradenbündel besitzt eine differenzierbare hermitesche Metrik. Je zwei solche Metriken unterscheiden sich um eine globale differenzierbare positive Funktion $\alpha : X \to \mathbb{R}_+^*$ als Faktor.

b) Sei $h = (h_k)$ eine differenzierbare hermitesche Metrik auf L. Man zeige:

$$d'd'' \log h_k = d'd'' \log h_\ell \quad \text{auf } U_k \cap U_\ell.$$

Daher kann man eine globale (1,1)-Form $\sigma \in \mathcal{E}^{1,1}(X)$ definieren durch

$$\sigma \mid U_k := \frac{1}{2\pi i} d'd'' \log h_k$$

Die Form σ heißt *Krümmungsform* der Metrik h.

Man beweise: Die Krümmungsformen $\sigma, \tilde\sigma$ zu zwei verschiedenen hermiteschen Metriken $h, \tilde h$ auf L sind cohomolog, d.h. es existiert eine 1-Form $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ mit $\tilde\sigma - \sigma = d\omega$.

Aufgabe 18

Sei L ein holomorphes Geradenbündel auf einer kompakten Riemannschen Fläche X

a) Sei h eine hermitesche Metrik auf L und $\sigma \in \mathcal{E}^{1,1}(X)$ die zugehörige Krümmungsform. Man beweise

$$\iint_X \sigma = \deg L.$$

---

b.w.

Anleitung. Sei f ein meromorpher Schnitt von L und $A \subset X$ die Menge aller Pole und Nullstellen von f. Man betrachte auf $X \smallsetminus A$ die durch $1/|f|^2$ gegebene hermitesche Metrik und vergleiche sie mit h.

b) Man zeige: Kann L durch einen Cozyklus $(g_{k\ell}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}^*)$ mit $|g_{k\ell}(x)| = 1$ für alle $x \in U_k \cap U_\ell$ definiert werden, so gilt $\deg L = 0$.

Aufgabe 19

a) Sei $A \subset \mathbb{P}^1$ die 6-elementige Menge $A := \{0, \pm 1, \pm i, \infty\}$ der Riemannschen Zahlenkugel und G die zur Oktaedergruppe isomorphe Gruppe

$$G := \{\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1) : \varphi(A) = A\}$$

(vgl. Aufgabe 5). Man betrachte die kanonische Quotienten-Abbildung

$$\pi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1/G.$$

Man zeige, dass $\mathbb{P}^1/G$ isomorph zu $\mathbb{P}^1$ ist und bestimme alle Verzweigungspunkte und kritischen Werte von π.

Aufgabe 20 (Fortsetzung von Aufgabe 19)

Bzgl. eines geeignet gewählten Isomorphismus $\mathbb{P}^1/G \cong \mathbb{P}^1$ gebe man eine explizite Darstellung von π als rationale Funktion in $\mathbb{C}(z)$ an.