Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

SS 2013
12./26. Juni 2013

Riemannsche Flächen II

Übungsblatt 4

Aufgabe 13

Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche. Man beweise

$$H^1(X, \mathcal{M}^*) = 0.$$

Hinweis. Man benutze, dass jedes holomorphe Geradenbündel auf X einen nicht-verschwindenden meromorphen Schnitt besitzt.

Aufgabe 14

Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche und seien $\mathcal{O}$ und $\mathcal{O}^*$ die Garben der holomorphen bzw. invertierbaren holomorphen Funktionen auf X. Man beweise, dass die kurze exakte Garben-Sequenz

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O} \xrightarrow{\mathrm{ex}} \mathcal{O}^* \to 0, \qquad \mathrm{ex}(f) := e^{2\pi i f},$$

eine exakte Sequenz

$$0 \to H^1(X, \mathbb{Z}) \to H^1(X, \mathcal{O}) \xrightarrow{\mathrm{ex}} H^1(X, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z} \to 0$$

von abelschen Gruppen induziert.

Aufgabe 15

a) Man zeige, dass auf einer kompakten Riemannschen Fläche X die natürliche Inklusion $\mathbb{R} \to \mathcal{O}$ einen Isomorphismus $H^1(X, \mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} H^1(X, \mathcal{O})$ induziert.

b) Sei $S^1 := \{z \in \mathbb{C}^* : |z| = 1\}$. Man zeige, dass jedes holomorphe Geradenbündel L auf X mit $\deg L = 0$ durch einen Cozyclus $(g_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, S^1)$ definiert werden kann.

Aufgabe 16 Sei

$$\Gamma_7 := \{A \subset SL(2, \mathbb{Z}) : A \equiv E \bmod 7\}$$

Man zeige, dass Γ_7 ein Normalteiler von $SL(2, \mathbb{Z})$ ist und bestimme die Ordnung der Quotientengruppe $SL(2, \mathbb{Z})/\Gamma_7$.
