Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

SS 2013
29. Mai 2013

Riemannsche Flächen II

Übungsblatt 3

Aufgabe 9 Sei $\mathfrak{U} = (U_1, U_2)$ die folgende offene Überdeckung von $\mathbb{C}^*$:

$$U_1 := \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_-, \quad U_2 := \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_+$$

und $g_{12} : U_1 \cap U_2 = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ definiert durch

$$g_{12}(z) := \begin{cases} +1 & \text{für } \operatorname{Im}(z) > 0, \\ -1 & \text{für } \operatorname{Im}(z) < 0. \end{cases}$$

Sei L das durch die Übergangsfunktion g_{12} definierte holomorphe Geradenbündel auf $\mathbb{C}^*$ ("komplexifiziertes Möbiusband"). Man beweise, dass L holomorph trivial ist.

Aufgabe 10

Auf einer kompakten Riemannschen Fläche X sei D ein Divisor und L_D das dem Divisor zugeordnete holomorphe Geradenbündel auf X.

Man beweise: Ist $\deg D = 0$, so ist das Bündel L_D topologisch trivial.

Hinweis. Man behandle zunächst den Fall, dass $D = P_1 - P_2$, wobei $P_1, P_2 \in X$ zwei Punkte sind, die in einer gemeinsamen Koordinaten-Umgebung liegen.

Aufgabe 11 Sei $\mathfrak{U} = (U_1, U_2)$ die folgende offene Überdeckung von $\mathbb{P}^1$:

$$U_1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 + \varepsilon\}, \quad U_2 := \{z \in \mathbb{P}_1 : |z| > 1 - \varepsilon\}, \quad 0 < \varepsilon < 1,$$

Sei $g_{12} : U_1 \cap U_2 \longrightarrow \mathbb{C}^*$ holomorph und L das holomorphe Geradenbündel auf $\mathbb{P}^1$, das durch die Übergangsfunktion g_{12} definiert wird. Man beweise

$$\deg L = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=1} \frac{g_{12}'(z)}{g_{12}(z)} dz.$$

Hinweis. Man betrachte zuerst den Spezialfall $g_{12}(z) = z^k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 12

Sei f eine meromorphe Funktion auf einer kompalten Riemannschen Fläche X. Man zeige:

(a) Es gibt ein holomorphes Geradenbündel L auf X und zwei holomorphe Schnitte φ, ψ von L, so dass $f = \varphi/\psi$.

(b)* Sei L_1 ein festes holomorphes Geradenbündel auf X mit $\deg L_1 > 0$. Dann kann man das Bündel L in (a) sogar in der Form $L = L_1^{\otimes m}$ mit geeignetem $m > 0$ wählen.