Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

SS 2013
8. Mai 2013

Riemannsche Flächen II

Übungsblatt 2

Aufgabe 5

a) Sei $A \subset \mathbb{P}^1$ die 6-elementige Menge $A := \{0, \pm 1, \pm i, \infty\}$. Man zeige, dass die Gruppe

$$G := \{\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1) : \varphi(A) = A\}$$

isomorph zur Gruppe der orientierungstreuen Symmetrien eines regulären Oktaeders ist.

b) Man bestimme die Automorphismen-Gruppe der hyperelliptischen Riemannsche Fläche $\pi : X \to \mathbb{P}^1$, die zur algebraischen Funktion $w = \sqrt{z(z^4-1)}$ gehört.

Aufgabe 6

Sei $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ ein Polynom n-ten Grades ohne mehrfache Nullstellen und $\pi : X \to \mathbb{P}^1$ die Riemannsche Fläche der algebraischen Funktion $w = \sqrt[3]{P(z)}$.

a) Man berechne das Geschlecht von X als Funktion von $n \geqslant 1$.

b) Man zeige: Falls $n \geqslant 4$, ist X nicht hyperelliptisch.

Aufgabe 7

Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht $g > 0$ und $\tilde{\Omega}(X) \subset \Omega(X)$ ein Untervektorraum der Dimension m. Ein Punkt $a \in X$ heiße $\tilde{\Omega}$-*Weierstrass-Punkt* vom Gewicht r, falls für eine Koordinaten-Umgebung (U, z) von a und eine Basis $\omega_1, \ldots, \omega_m \in \tilde{\Omega}(X)$ mit Darstellungen $\omega_j = f_j dz$ die Wronski-Determinante $W_z(f_1, \ldots, f_m)$ im Punkt a eine Nullstelle der Ordnung r hat.

Man zeige, dass diese Definition unabhängig von der Auswahl der Koordinaten-Umgebung und der Basis ist und dass die Gesamtzahl der $\tilde{\Omega}$-Weierstrass-Punkte unter Berücksichtigung der Gewichte gleich $(g-1)m(m+1)$ ist.

Aufgabe 8*

Sei X eine nicht hyperelliptische kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht 3.

Man zeige: Es gibt eine 3-blättrige holomorphe Überlagerungs-Abbildung $f : X \to \mathbb{P}^1$, so dass $f^{-1}(\infty)$ aus genau zwei Punkten besteht, also eine meromorphe Funktion f, die einen Pol erster Ordnung und einen Pol zweiter Ordnung hat und sonst überall holomorph ist.

Hinweis. Man verwende Aufgabe 7 mit dem Untervektorraum $\tilde{\Omega}(X) \subset \Omega(X)$ aller Differentialformen, die in einem vorgegebenen Punkt $x_0 \in X$ verschwinden.