Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

SS 2013
24. April 2013

Riemannsche Flächen II
Übungsblatt 1

Aufgabe 1

Auf einem Gebiet $U \subset \mathbb{C}$ seien $f_1, \ldots, f_m, \varphi : U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen. Man beweise folgende Formel für die Wronski-Determinante:

$$W(\varphi f_1, \ldots, \varphi f_m) = \varphi^m W(f_1, \ldots, f_m).$$

Aufgabe 2

Sei $P(z) = \prod_{j=1}^{4}(z - a_j)$ ein Polynom 4-ten Grades mit paarweise verschiedenen Nullstellen $a_1, \ldots, a_4 \in \mathbb{C}$ und $\pi : X \to \mathbb{P}^1$ die Riemannsche Fläche von $\sqrt[3]{P(z)}$, d.h. der algebraischen Funktion, die durch das Polynom

$$w^3 - P(z) \in \mathcal{M}(\mathbb{P}^1)[w], \qquad \mathcal{M}(\mathbb{P}^1) \cong \mathbb{C}(z).$$

definiert wird. Man beweise, dass das Geschlecht von X gleich drei ist und dass die Differentialformen

$$\omega_1 = \frac{dz}{w}, \quad \omega_2 = \frac{dz}{w^2}, \quad \omega_3 = \frac{z dz}{w^2}$$

eine Basis von $\Omega(X)$ bilden.

Aufgabe 3 (Fortsetzung)

Man zeige, dass die Verweigungspunkte von $\pi : X \to \mathbb{P}^1$ Weierstrass-Punkte sind und bestimme deren Gewicht. Man folgere, dass X noch weitere Weierstrass-Punkte besitzt.

Aufgabe 4* (Fortsetzung)

Man beweise, dass die übrigen Weierstrass-Punkte von X über den Nullstellen des Polynoms 6-ten Grades

$$F(z) := 3P(z)P''(z) - 2P'(z)^2$$

liegen.
