Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

SS 2011
29. Juni 2011

Analytische Zahlentheorie

Übungsblatt 8

Aufgabe 29

Man beweise für $\mathrm{Re}(s) > 1$ die Integral-Darstellung

$$\log \zeta(s) = s \int_2^\infty \frac{\pi(x)}{x^s - 1} \cdot \frac{dx}{x}.$$

Aufgabe 30

Sei $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ eine Dirchlet-Reihe mit $\sigma_a(f) < \infty$ und sei $A(x) := \sum_{n \leqslant x} a_n$. Weiter sei $c > \max(0, \sigma_a(f))$. Man zeige, dass

$$I(x,T) := \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} f(s) x^s \frac{ds}{s}$$

für $T \to \infty$ auf jedem kompakten Intervall $a \leqslant x \leqslant b$, das keine Sprungstelle von $A(x)$ enthält, gleichmäßig gegen die Funktion $A : [a,b] \to \mathbb{C}$ konvergiert.

Aufgabe 31 Man zeige:

$$\zeta(\sigma) < 0 \quad \text{für } -1 < \sigma < 1.$$

Aufgabe 32* Man beweise:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_T^{2T} \zeta(\tfrac{1}{2} + it)\, dt = 1.$$

Besprechung am Mittwoch, 14. Juli 2011, 16 Uhr c.t., Übungsraum 047