Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

SS 2011
21. Juni 2011

Analytische Zahlentheorie

Übungsblatt 7

Aufgabe 25*

Es bezeichne $\omega(n)$ die Anzahl der verschiedenen Primteiler von n (vgl. Aufgabe 15).
Man beweise:

Der Limes $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\Big(\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\omega(n) \;-\; \log\log x\Big) =: \beta$ existiert.

Aufgabe 26

Die Folge a_n, $n \geqslant 1$ sei definiert durch

$$\log\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}, \quad \text{für } \mathrm{Re}(s) > 1.$$

Man zeige:

a) $\displaystyle\pi_1(x) := \sum_{n\leqslant x} a_n = \sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k}\,\pi(x^{1/k}).$

b) $\displaystyle\pi(x) = \sum_{k\geqslant 1}\frac{\mu(k)}{k}\,\pi_1(x^{1/k}).$

Aufgabe 27

Sei $0 < \sigma < 1$. Man zeige

$$|\zeta(\sigma + it)| = O(t^{1-\sigma}) \quad \text{für } t \to \infty.$$

Aufgabe 28

Die reelle Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$h(t) := \mathrm{Im}\Big(\log\Gamma\Big(\frac{1}{4} + i\,\frac{t}{2}\Big)\Big) - \frac{t}{2}\log\pi.$$

Dabei wird unter $\log\Gamma(z)$ derjenige Zweig des Logarithmus von $\Gamma(z)$ in $\{\mathrm{Re}(z) > 0\}$ verstanden, der auf der positiven reellen Achse reell ist.

Man zeige: Die Funktion

$$Z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto Z(t) := \zeta(\tfrac{1}{2} + it)e^{ih(t)}$$

ist reell und es gilt $Z(t) = 0$ genau dann, wenn $\zeta(\frac{1}{2} + it) = 0$.

Besprechung am Mittwoch, 29. Juni 2011, 16 Uhr c.t., Übungsraum 047