Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

SS 2011
14. Juni 2011

Analytische Zahlentheorie

Übungsblatt 6

Aufgabe 21 Man beweise:

a) $$\lim_{x\to\infty} \sum_{x/2<n\leqslant x} \frac{1}{n} = \log 2,$$

b) $$\lim_{x\to\infty} \sum_{\sqrt{x}<p\leqslant x} \frac{1}{p} = \log 2.$$

Aufgabe 22

a) Man zeige: Für jede Folge $q_1 < q_2 < \ldots < q_n < q_{n+1} < \ldots$ natürlicher Zahlen mit $q_n \sim n\log n$ gilt:

$$\sum_{q_n\leqslant x} \frac{1}{q_n} \sim \log\log x \qquad \text{für } x \to \infty.$$

b)* Existiert für jede Folge $q_1 < q_2 < \ldots < q_n < q_{n+1} < \ldots$ natürlicher Zahlen mit $q_n \sim n\log n$ der Limes

$$\lim_{x\to\infty} \Big(\sum_{q_n\leqslant x} \frac{1}{q_n} - \log\log x\Big) \ ?$$

Beweis oder Gegenbeispiel!

Aufgabe 23 Für $\tau \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Im}(\tau) > 0$ und alle $z \in \mathbb{C}$ sei definiert

$$\vartheta(\tau, z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{i\pi n^2\tau} e^{2\pi i n z}.$$

Man beweise die Funktionalgleichung

$$\vartheta\Big(-\frac{1}{\tau}, \frac{z}{\tau}\Big) = \sqrt{\frac{\tau}{i}}\, e^{i\pi z^2/\tau}\vartheta(\tau, z) \qquad \text{(Hauptzweig der Wurzel).}$$

Aufgabe 24 Man zeige: Für reelle Variable $t > 0$ und $-\infty < x < \infty$ genügt die Funktion $(t, x) \mapsto \vartheta(it, x)$ der Wärmeleitungs-Gleichung

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 4\pi\frac{\partial}{\partial t}\Big)\vartheta(it, x) = 0.$$

Besprechung am Mittwoch, 22. Juni 2011, 16 Uhr c.t., Übungsraum 047