Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

SS 2011
7. Juni 2011

Analytische Zahlentheorie

Übungsblatt 5

Aufgabe 17 Sei $(q_n)_{n\geqslant 1}$ eine monoton wachsende Folge positiver reeller Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} q_n = \infty$. Für $x > 0$ werde definiert

$$Q(x) := \max\{n \in \mathbb{N} : q_n \leqslant x\}.$$

Man zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

a) $\quad q_n \sim n \log n$,

b) $\quad Q(x) \sim \dfrac{x}{\log x}$.

Aufgabe 18

Man konstruiere eine Folge $q_1 < q_2 < \ldots < q_n < q_{n+1} < \ldots$ natürlicher Zahlen mit $q_n \sim n \log n$, so dass folgendes gilt:

Es gibt beliebig große natürliche Zahlen N, so dass kein q_n existiert mit $N^2 < q_n < (N+1)^2$.

Aufgabe 19 Man beweise für $\mathrm{Re}(s) > 1$ die Formel

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\, dx$$

Aufgabe 20

a) Sei $a \in \mathbb{R}_+^*$. Für die Funktion $f(x) := \dfrac{1}{a^2 + x^2}$ berechne man mittels Residuenkalkül die Fourier-Transformierte

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i x t}}{a^2 + x^2}\, dx$$

Hinweis. Fallunterscheidung $t > 0$, $t < 0$, $t = 0$.

b) Was ergibt sich bei Anwendung der Poissonschen Summenformel auf die Funktion f ?

Besprechung am Mittwoch, 15. Juni 2011, 16 Uhr c.t., Übungsraum 047