Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

SS 2011
31. Mai 2011

Analytische Zahlentheorie

Übungsblatt 4

Aufgabe 13* Man zeige, dass der Limes

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{n\leqslant x} \left(\frac{x}{n} - \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor \right) =: A \ \in \ \mathbb{R}_+$$

existiert und berechne ihn.

Aufgabe 14 Sei

$$F(s) := \zeta^2(s) + \zeta'(s).$$

Man zeige, dass diese in $\{\mathrm{Re}(s) > 0\}$ meromorphe Funktion bei $s = 1$ einen Pol 1. Ordnung besitzt und berechne ihr Residuum in diesem Punkt.

Aufgabe 15

Für eine natürliche Zahl n sei $\omega(n)$ die Anzahl der verschiedenen Primteiler von n.

a) Man beweise

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega(n)}{n^s} = P(s)\zeta(s) \quad \text{für } \mathrm{Re}(s) > 1.$$

Dabei ist $P(s) = \sum_p 1/p^s$ die Primzeta-Funktion.

b) Man berechne damit die Summe

$$\sum_{d|n} \mu(d)\omega\Big(\frac{n}{d}\Big).$$

Aufgabe 16 Man beweise die folgenden asymptotischen Beziehungen für $x \to \infty$:

a) Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$\pi((1+\varepsilon)x) - \pi(x) \sim \frac{\varepsilon x}{\log x}.$$

b) Für jedes $a > 1$ gilt

$$\pi(ax) \sim a\pi(x).$$

Besprechung am Mittwoch, 8. Juni 2011, 16 Uhr c.t., Übungsraum 047