Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

SS 2011
23. Mai 2011

Analytische Zahlentheorie

Übungsblatt 3

Aufgabe 9* Man beweise: Für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ \gcd(n,k)=1}} e^{2\pi i k/n} = \mu(n).$$

Aufgabe 10 Sei $f : [1, \infty[\to \mathbb{C}$ eine Funktion, so dass ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $f(x) = 0$ für $x \leqslant 1 + \varepsilon$. Es werde eine Funktion $F : [1, \infty[\to \mathbb{C}$ definiert durch

$$F(x) := \sum_{k \geqslant 1} f(x^{1/k}).$$

Man zeige

$$f(x) = \sum_{k \geqslant 1} \mu(k) F(x^{1/k}).$$

Aufgabe 11

a) Man beweise für alle $n \geqslant 1$

$$\sum_{k^2 | n} \mu(k) = |\mu(n)|.$$

Dabei wird über alle quadratischen Teiler von n (einschließlich $k^2 = 1$) summiert.

b) Man folgere aus a) für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1$

$$\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n \geqslant 1} \frac{|\mu(n)|}{n^s}.$$

Aufgabe 12 Es bezeichne $\mathrm{Sqfr}(x)$ die Menge aller quadratfreien natürlichen Zahlen $\leqslant x$. Man beweise

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\#\mathrm{Sqfr}(x)}{x} = \frac{1}{\zeta(2)} = \frac{6}{\pi^2}.$$

Hinweis. Man zeige dazu

$$\sum_{k \leqslant \sqrt{x}} \#\mathrm{Sqfr}\Big(\frac{x}{k^2}\Big) = \lfloor x \rfloor.$$

Besprechung am Mittwoch, 1. Juni 2011, 16 Uhr c.t., Übungsraum 047