MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
PROF. DR. O. FORSTER

SS 2011
17. Mai 2011

Analytische Zahlentheorie
Übungsblatt 2

Aufgabe 5 Sei $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ eine monoton fallende Funktion mit $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ und

$$F(x) := \int_1^x f(u)du.$$

a) Man zeige

$$\sum_{n \leqslant x} f(n) = F(x) + O(1).$$

b) Genauer gilt: Es gibt eine Konstante $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass

$$\sum_{n \leqslant x} f(n) = F(x) + \alpha + O(f(x)).$$

Aufgabe 6 Man berechne die Koeffizienten a_n der Dirichlet-Reihe

$$F(s) := \Big(1 - \frac{1}{3^{s-1}}\Big)\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

und bestimme die Konvergenz-Abszissen $\sigma_a(F)$ und $\sigma_c(F)$.

Aufgabe 7 Man konstruiere eine Dirichlet-Reihe $f(s) = \sum \frac{a_n}{n^s}$ mit

$$\sigma_a(f) = 1 \quad \text{und} \quad \sigma_c(f) = \tfrac{1}{2}.$$

Aufgabe 8 Sei $f(s) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ eine Dirichlet-Reihe, die für $s = 0$ divergiert.

Man beweise folgende Formel für die bedingte Konvergenz-Abszisse:

$$\sigma_c(f) = \limsup_{N\to\infty} \frac{\log |A(N)|}{\log N}, \quad \text{wobei } A(N) := \sum_{n=1}^{N} a_n.$$

Besprechung am Mittwoch, 25. Mai 2011, 16 Uhr c.t., Übungsraum 047