Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

SS 2011
9. Mai 2011

Analytische Zahlentheorie

Übungsblatt 1

Aufgabe 1 Man beweise folgende Darstellungen für die Euler-Mascheronische Konstante:

(a) $\gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} - \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right\}$, (b) $\gamma = 1 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} (\zeta(k) - 1)$.

Aufgabe 2 Man untersuche, ob die folgende unendliche Reihe konvergiert:

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p \log p}.$$

Aufgabe 3

a) Für $x \in \mathbb{R}_+$ und $t \in \mathbb{R}$ sei $S(x,t) := \sum_{1 \leqslant n \leqslant x} e^{int}$.

Man zeige: Zu jedem δ mit $0 < \delta < \pi$ existiert eine Konstante $K = K(\delta) > 0$, so dass

$$|S(x,t)| \leqslant K \text{ für alle } x > 0 \text{ und alle } t \in [\delta, 2\pi - \delta].$$

b) Man beweise mittels Abelscher partieller Summation: Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{int}}{n}$$

konvergiert gleichmäßig auf jedem Intervall $[\delta, 2\pi - \delta]$, $0 < \delta < \pi$.

Aufgabe 4 Man beweise:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+it}}$ divergiert für alle $t \in \mathbb{R}$.

b)* $\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p^{1+it}}$ konvergiert für alle $t \in \mathbb{R}^*$.

Besprechung am Mittwoch, 18. Mai 2011, 16 Uhr c.t., Übungsraum 047