Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

WS 2010/11
22. Dez. 2010

Elliptische Funktionen und Elliptische Kurven

Übungsblatt 6

Aufgabe 21

Sei $\Lambda := \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \subset \mathbb{C}$ ein Gitter ($\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ reell-linear unabhängig).

a) Sei $\Lambda_1 \subset \Lambda$ das Untergitter $\Lambda_1 := 2\mathbb{Z}\omega_1 + 3\mathbb{Z}\omega_2$. Man bestimme eine Basis ω_1', ω_2' von Λ, so dass $\Lambda_1 = \mathbb{Z}\omega_1' + 6\mathbb{Z}\omega_1'$.

b) Sei $\Lambda_2 \subset \Lambda$ das Untergitter $\Lambda_2 := 2\mathbb{Z}\omega_1 + 4\mathbb{Z}\omega_2$. Man zeige: Es gibt keine Basis ω_1', ω_2' von Λ, so dass $\Lambda_2 = \mathbb{Z}\omega_1' + 8\mathbb{Z}\omega_1'$.

Aufgabe 22

Sei $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \subset \mathbb{C}$ ein Gitter mit positiv orientierter Basis (ω_1, ω_2) und $\tau := \omega_2/\omega_1$. Wir definieren Gittervektoren ω_1' und ω_2' wie folgt:

Sei $\omega_1' \in \Lambda \smallsetminus \{0\}$ ein Vektor minimaler Länge (bzgl. des gewöhnlichen Absolutbetrags $|\omega_1'|$) und $\omega_2' \in \Lambda \smallsetminus \{0\}$ ein Vektor minimaler Länge unter den folgenden Nebenbedingungen:

i) ω_2' ist von ω_1' reell linear unabhängig,

ii) (ω_1', ω_2') ist positiv orientiert.

Man zeige:

a) $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1' + \mathbb{Z}\omega_2'$

b) $\tau' := \omega_2'/\omega_1'$ ist bzgl. der Modulgruppe $\Gamma = PSL(2, \mathbb{Z})$ äquivalent zu τ und liegt im Fundamentalbereich

$$\mathfrak{F} := \{z \in \mathbb{H} : |\mathrm{Re}(z)| \leqslant \tfrac{1}{2}, |z| \geqslant 1\}.$$

Aufgabe 23

Für eine ganze Zahl $k \geqslant 2$ und $\tau \in \mathbb{H}$ sei

$$G_{2k}(\tau) := \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{1}{(m + n\tau)^{2k}}$$

die Eisenstein-Reihe. Man zeige:

$$\lim_{\mathrm{Im}(\tau) \to \infty} G_{2k}(\tau) = 2\zeta(2k), \qquad \text{wobei} \quad \zeta(2k) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}.$$

---

b.w.

Aufgabe 24

Für eine ganze Zahl $k \geqslant 2$ und $\tau \in \mathbb{H}$ sei

$$G_{2k}^*(\tau) := \sum_{\gcd(m,n)=1} \frac{1}{(m+n\tau)^{2k}},$$

wobei über alle teilerfremden $(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ summiert wird. Man beweise:

$$G_{2k}(\tau) = \zeta(2k) G_{2k}^*(\tau).$$

Abgabetermin: Mittwoch, 19. Januar 2011, 14 Uhr

Frohe Weihnachten und ein gutes Neues Jahr!