Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

WS 2010/11
15. Dez. 2010

Elliptische Funktionen und Elliptische Kurven

Übungsblatt 5

Aufgabe 17

Sei $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \subset \mathbb{C}$ ein Gitter und $\Lambda_1 := 2\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$. Da jede bzgl. Λ doppelt-periodische meromorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}_1$ auch doppelt-periodisch bzgl. Λ_1 ist, hat man eine natürliche Einbettung $\mathcal{M}(\mathbb{C}/\Lambda) \hookrightarrow \mathcal{M}(\mathbb{C}/\Lambda_1)$ der Funktionenkörper.

Man zeige, dass $\mathcal{M}(\mathbb{C}/\Lambda_1)$ eine Erweiterung vom Grad 2 des Körpers $\mathcal{M}(\mathbb{C}/\Lambda)$ ist und gebe einen Automorphismus $\sigma : \mathcal{M}(\mathbb{C}/\Lambda_1) \to \mathcal{M}(\mathbb{C}/\Lambda_1)$ an, so dass $\mathcal{M}(\mathbb{C}/\Lambda)$ der Fixkörper von σ ist, d.h.

$$\mathcal{M}(\mathbb{C}/\Lambda) = \{f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}/\Lambda_1) : \sigma f = f\}.$$

Aufgabe 18

Sei $\mathfrak{F} = \{z \in \mathbb{H} : |\mathrm{Re}(z)| \leqslant \frac{1}{2}, |z| \geqslant 1\}$ der Fundamentalbereich der Modulgruppe $\Gamma = PSL(2, \mathbb{Z})$. Man zeige:

a) Ist ein Punkt $\tau \in \mathfrak{F}$ Fixpunkt eines Elements $\mathrm{id} \neq \phi \in \Gamma$ (d.h. $\phi(\tau) = \tau$), so gilt $\tau = i$ oder $\tau = \varrho := e^{2\pi i/3}$ oder $\tau = \varrho + 1$.

b) Jeder Punkt $\tau \in \mathbb{H}$, der Fixpunkt einer Transformation $\mathrm{id} \neq \phi \in \Gamma$ ist, ist modulo Γ zu i oder ϱ äquivalent.

Aufgabe 19

Sei Γ_ϑ die Menge aller Transformationen $z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ aus Γ mit $a+b+c+d \equiv 0 \bmod 2$. Man zeige:

a) Γ_ϑ ist eine Untergruppe, aber kein Normalteiler von Γ.

b) Γ_ϑ hat Index 3 in Γ, genauer: Γ ist disjunkte Vereinigung der 3 Nebenklassen Γ_ϑ, $T \cdot \Gamma_\vartheta$ und $ST \cdot \Gamma_\vartheta$. Dabei ist $T : z \mapsto z+1$ und $S : z \mapsto -1/z$.

Aufgabe 20

Sei Γ_ϑ wie in Aufgabe 19. Man zeige:

$$\mathfrak{F}(\Gamma_\vartheta) := \{z \in \mathbb{H} : |\mathrm{Re}(z)| \leqslant 1, |z| \geqslant 1\}$$

ist ein Fundamentalbereich für Γ_ϑ in folgendem Sinn:

i) Jeder Punkt $z \in \mathbb{H}$ ist modulo Γ_ϑ zu einem Punkt $z' \in \mathfrak{F}(\Gamma_\vartheta)$ äquivalent.

ii) Sind $z_1 \neq z_2$ zwei Elemente aus $\mathfrak{F}(\Gamma_\vartheta)$, die untereinander modulo Γ_ϑ äquivalent sind, so liegen beide Elemente auf dem Rand von $\mathfrak{F}(\Gamma_\vartheta)$, und gehen durch Anwendung von T^2 oder S auseinander hervor.

Abgabetermin: Mittwoch, 12. Januar 2011, 14 Uhr