MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
PROF. DR. O. FORSTER

WS 2010/11
26. Nov. 2010

Elliptische Funktionen und Elliptische Kurven

Übungsblatt 4

Aufgabe 13

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\mathrm{Char}(K) \neq 2, 3$ (z.B. $K = \mathbb{C}$) und seien $a_1, a_2, a_3, a_4 \in K$ paarweise verschiedene Zahlen. Sei

$$f_4(X) := \prod_{\nu=1}^{4}(X - a_\nu) \in K[X]$$

und seien $C', C'' \subset \mathbb{P}_2(K)$ die Kurven mit den affinen Geichungen

$$Y^2 = f_4(X) \quad \text{bzw.} \quad Y^3 = f_4(X).$$

Man bestimme alle Singularitäten von C' und C''.

Aufgabe 14

Sei $\Lambda \subset \mathbb{C}$ ein Gitter, $g_2 := 60G_4(\Lambda)$, $g_3 := 140G_6(\Lambda)$ und $\wp = \wp_\Lambda$ die zugehörige Weierstraßsche $\wp$-Funktion. Man zeige:

a) Für jedes $a \in \mathbb{C}$ ist die Funktion $f(z) := \wp(z - a)$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$(1) \qquad f'(z)^2 = 4f(z)^3 - g_2 f(z) - g_3$$

b) Jede nicht-konstante Lösung der Differentialgleichung (1) hat die Gestalt $f(z) := \wp(z-a)$ mit $a \in \mathbb{C}$. Die Konstante a ist modulo Λ durch f eindeutig bestimmt.

Aufgabe 15

Sei $\Lambda \subset \mathbb{C}$ ein Gitter und

$$\sigma : \mathbb{C}/\Lambda \to \mathbb{C}/\Lambda, \quad z \mapsto \sigma(z) := -z,$$

die Punktspiegelung am Nullpunkt. σ operiert auch auf der Gruppe der Divisoren $\mathrm{Div}(\mathbb{C}/\Lambda)$: Für $D = \sum_{i=1}^n k_i[P_i] \in \mathrm{Div}(\mathbb{C}/\Lambda)$ setzt man $\sigma(D) := \sum_{i=1}^n k_i[\sigma(P_i)]$. Ein Divisor $D \in \mathrm{Div}(\mathbb{C}/\Lambda)$ heißt σ-invariant oder kurz symmetrisch, wenn $\sigma(D) = D$. Man zeige:

a) Der Divisor einer nicht identisch verschwindenden meromorphen Funktion $f : \mathbb{C}/\Lambda \to \mathbb{P}_1$ ist genau dann symmetrisch, wenn f eine gerade oder eine ungerade Funktion ist.

b) Wie kann man an einem symmetrischen Hauptdivisor $D \in \mathrm{Div}(\mathbb{C}/\Lambda)$ erkennen, ob er zu einer geraden oder einer ungeraden Funktion gehört?

---

b.w.

Aufgabe 16

Sei $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \subset \mathbb{C}$ ein Gitter mit zugehöriger $\wp$-Funktion $\wp := \wp_\Lambda$ und $e_2 := \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right)$. Man zeige:

a) Die Funktion $\wp - e_2$ besitzt eine bis aufs Vorzeichen eindeutig bestimmte Quadratwurzel, d.h. es gibt eine meromorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}_1$ mit $f^2 = \wp - e_2$. Diese Funktion erfüllt die Beziehungen

$$f(z + \omega_1) = -f(z), \quad f(z + \omega_2) = f(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}\,,$$

d.h. f ist doppelt-periodisch bzgl. des Gitters $\Lambda_1 := 2\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$.

Hinweis. Man betrachte den Divisor einer hypothetischen Wurzel von $\wp - e_2$ und zeige, dass er ein Hauptdivisor auf $\mathbb{C}/\Lambda_1$ ist.

b) Die Funktion f ist ungerade und genügt der Differentialgleichung

$$f'(z)^2 = (f(z)^2 - \lambda_1^2)(f(z)^2 - \lambda_2^2)$$

mit gewissen, von ω_1 und ω_2 abhängigen Konstanten $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}^*$, $\lambda_1 \neq \pm\lambda_2$.

Abgabetermin: Mittwoch, 8. Dezember 2010, 14 Uhr