Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

WS 2010/11
15. Nov. 2010

Elliptische Funktionen und Elliptische Kurven
Übungsblatt 3

Aufgabe 9

Sei $\Lambda := \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \subset \mathbb{C}$ ein Gitter, $\wp$ die zugehörige Weierstraßsche $\wp$-Funktion und

$$e_j := \wp\left(\frac{\omega_j}{2}\right), \quad j = 1, 2, 3, \quad \omega_3 := \omega_1 + \omega_2.$$

Für eine weitere $\mathbb{Z}$-Basis ω_1', ω_2' von Λ sei analog

$$e_j' := \wp\left(\frac{\omega_j'}{2}\right), \quad j = 1, 2, 3.$$

Man zeige:

a) (e_1', e_2', e_3') ist eine Permutation von (e_1, e_2, e_3).

b) Jede Permutation von (e_1, e_2, e_3) kann so durch eine geeignete Wahl einer Basis ω_1', ω_2' von Λ erhalten werden.

Aufgabe 10

Seien $\Lambda \subset \mathbb{C}$ und e_1, e_2, e_3 wie in Aufgabe 8. Man zeige für die Eisenstein-Reihe G_4 die Formel

$$G_4(\Lambda) = \frac{1}{45}((e_1 - e_2)^2 + (e_1 - e_3)(e_2 - e_3)).$$

Aufgabe 11

Sei C die durch das Polynom $F(X, Y) := X^2 + Y^2 - 3 \in \mathbb{Q}[X, Y]$ definierte affin-algebraische ebene Kurve.

a) Man zeige: $C(\mathbb{Q})$ ist leer.

b) Sei $K := \mathbb{Q}(\sqrt{3})$. Man bestimme alle Punkte von $C(K)$.

Hinweis. Ist $P \in C(K)$ ein Punkt der Kurve, so schneidet jede über K definierte Gerade durch P die Kurve in einem weiteren K-rationalen Punkt.

---

b.w.

Aufgabe 12

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Man zeige: Die Kurve

$$y^2 = x^3 + ax + b, \qquad a, b \in K$$

lässt sich durch eine Koordinaten-Transformation der Gestalt

$$x \mapsto \alpha x, \qquad y \mapsto \beta y, \qquad \alpha, \beta \in K^*$$

in eine Kurve mit der Gleichung

$$y^2 = x^3 + 1 \qquad \text{oder}$$

$$y^2 = x^3 + x + B, \qquad B \in K$$

transformieren. Inwieweit ist B durch a, b eindeutig bestimmt?

Abgabetermin: Mittwoch, 24. November 2010, 14 Uhr