Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

SS 2009
29. April 2009

Algorithmische Zahlentheorie
Übungsblatt 2

Aufgabe 5 Seien x, y zwei ganze Zahlen. Man beweise: Genau dann gilt $\gcd(x, y) = d$, wenn es eine ganzzahlige Matrix $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ mit Determinante 1 gibt, so dass

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6

a) Man zeige: Genau dann ist ein ganzzahliger Vektor $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ die erste Zeile einer geeigneten Matrix $A \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$, wenn $\gcd(x_1, \ldots, x_n) = 1$.

b) Man ergänze die Zeile $(143, 117, 123)$ zu einer ganzzahligen 3×3-Matrix mit Determinante 1.

Aufgabe 7

Sind x, y teilerfremde ganze Zahlen, so gibt es bekanntlich ganze Zahlen λ, μ mit

$$\lambda x + \mu y = 1.$$

a) Man zeige, dass man im Fall $x \neq 0, y \neq 0$ die Koeffizienten λ, μ sogar so wählen kann, dass

$$|\lambda| \leqslant |y| \quad \text{und} \quad |\mu| \leqslant |x|.$$

b) Man zeige, dass der erweiterte Euklidische Algorithmus automatisch solche Koeffizienten liefert.

Aufgabe 8 Im Ring

$$\mathbb{Z}[\sqrt{5}] = \{n + m\sqrt{5} : n, m \in \mathbb{Z}\}$$

seien die Elemente $a := 4$ und $b = 2 + 2\sqrt{5}$ gegeben.

Man zeige, dass

$$d_1 := 2 \quad \text{und} \quad d_2 := 1 + \sqrt{5}$$

gemeinsame Teiler von a und b sind, dass es aber keinen gemeinsamen Teiler d von a und b gibt mit $d_1 \mid d$ und $d_2 \mid d$. Insbesondere haben a und b keinen größten gemeinsamen Teiler.

Abgabetermin: Freitag, 8. Mai 2009, 14 Uhr, Übungskasten im 1. Stock