Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

SS 2009
22. April 2009

Algorithmische Zahlentheorie

Übungsblatt 1

Aufgabe 1 Für die ersten Fibonacci-Zahlen mit ungeradem Primzahl-Index

$$\mathrm{fib}(3) = 2, \quad \mathrm{fib}(5) = 5, \quad \mathrm{fib}(7) = 13, \quad \mathrm{fib}(11) = 89, \quad \ldots$$

ergeben sich lauter Primzahlen. Man widerlege die Vermutung, dass $\mathrm{fib}(p)$ für eine Primzahl $p \geqslant 3$ stets prim ist und beweise, dass aber gilt:

$\mathrm{fib}(n)$ *ist höchstens dann prim, wenn* $n = 4$ *oder* n *eine Primzahl ist.*

Hinweis. Man zeige dazu: $m \mid n \;\Rightarrow\; \mathrm{fib}(m) \mid \mathrm{fib}(n)$.

Aufgabe 2 Für eine ganze Zahl $m \geqslant 2$ bezeichne $\mathrm{fib}_m(n) \in \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$ den Rest der Teilung von $\mathrm{fib}(n)$ durch m.

a) Man zeige: Für festes m ist die Folge $\mathrm{fib}_m(n)$, $n \in \mathbb{N}$, rein periodisch.

b) Man bestimme die Periodenlänge für $m = 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Aufgabe 3

a) Man beweise: Jede Primzahl p teilt unendlich viele Fibonacci-Zahlen.

b) Welche Fibonacci-Zahlen sind Vielfache von 5, 7 bzw. 11 ?

c)* Man bestimme den kleinsten Index $n > 0$, so dass $\mathrm{fib}(n)$ durch die Primzahl

$$p := 88\,88888\,88888\,88889 \qquad \text{(16 Ziffern 8, letzte Ziffer 9)}$$

teilbar ist.

Aufgabe 4 Sei $a > 0$ eine ganzzahlige Konstante. Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei rekursiv definert durch

$$x_0 := 0, \quad x_1 := 1, \quad x_{n+2} := a x_{n+1} - x_n \qquad \text{für alle } n \geqslant 0.$$

a) Man beweise die Formeln

$$x_{2n} = a x_n^2 - 2 x_n x_{n-1}, \qquad x_{2n+1} = x_{n+1}^2 - x_n^2.$$

b) Man leite eine explizite Formel für x_n her.

c) Man zeige: Für $a = 3$ ergibt sich eine Teilfolge der Fibonacci-Zahlen.

Abgabetermin: Mittwoch, 29. April 2009, 14 Uhr, Übungskasten im 1. Stock

Stern-Aufgaben sind nicht obligatorisch; ihre Lösung ergibt Extra-Punkte. Geht bis zum Abgabetermin des Blattes keine richtige Lösung ein, verlängert sich die Abgabefrist automatisch. Die Lösungen sind danach per Email an `forster@math.lmu.de` einzusenden. Die Abgabefrist endet nach Eingang der ersten richtigen Lösung.