

Primzahlen. Eine Einführung in die Zahlentheorie
Klausur

Aufgabe 1

- a) Auf wieviele Nullen endet $200!$ in Dezimaldarstellung?
- b) Man bestimme die größte Primzahl p mit $p^3 \mid 200!$.

Aufgabe 2

Sei n eine natürliche Zahl. Man zeige:

- a) Die Zahl $7^n - 1$ ist stets durch 6 teilbar.
- b) Die Zahl $(7^n - 1)/6$ ist höchstens dann prim, wenn n prim ist.

Aufgabe 3

Sei n eine natürliche Zahl. Man zeige:

- a) Für jeden ungeraden Primteiler $q \mid n^2 + 1$ gilt $q \equiv 1 \pmod{4}$.
- b) Für jeden ungeraden Primteiler $q \mid n^4 + 1$ gilt $q \equiv 1 \pmod{8}$.

Aufgabe 4

Sei p eine Primzahl mit $3 \mid p - 1$ und a eine ganze Zahl mit $p \nmid a$. Man beweise:

Die Kongruenz $x^3 \equiv a \pmod{p}$ ist genau dann lösbar, wenn

$$a^{(p-1)/3} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Arbeitszeit: 60 Minuten