Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

SS 2008
18. Juni 2008

Primzahlen. Eine Einführung in die Zahlentheorie

Übungsblatt 5

Aufgabe 17

Die Tschebyscheffschen Funktionen ϑ und ψ sind für reelles $x \geqslant 1$ wie folgt definiert:

$$\vartheta(x) := \sum_{p \leqslant x} \log p, \qquad \psi(x) := \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n).$$

Dabei ist Λ die Mangoldtsche Funktion, vgl. Aufgabe 16. Man beweise:

a) $\displaystyle \psi(x) = \sum_{m \geqslant 1} \vartheta(\sqrt[m]{x}).$

b) $\displaystyle \vartheta(x) = \sum_{m \geqslant 1} \mu(m)\psi(\sqrt[m]{x}).$

Aufgabe 18

Für die Funktion ψ aus Aufgabe 17 beweise man:

$$\sum_{n \leqslant x} \log n = \sum_{n \leqslant x} \psi\left(\frac{x}{n}\right).$$

Aufgabe 19

Man zeige: $\displaystyle \sum_{d^2 | n} \mu(d) = |\mu(n)|.$

Dabei wird über alle Teiler von n, die Quadratzahlen sind, summiert.

Aufgabe 20

Man beweise durch Induktion nach k:

a) Sei p eine ungerade Primzahl. Dann hat die Kongruenz $x^2 \equiv 1 \bmod p^k$ genau zwei Lösungen, nämlich $x \equiv \pm 1 \bmod p^k$.

b) Für $k \geqslant 3$ hat die Kongruenz $x^2 \equiv 1 \bmod 2^k$ genau vier Lösungen, nämlich $x \equiv \pm 1 \bmod 2^k$ und $x \equiv \pm(1 + 2^{k-1}) \bmod 2^k$.

Abgabetermin: Mittwoch, 25. Juni 2008, 14 Uhr, Übungskasten im 1. Stock