Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

SS 2008
21. Mai 2008

Primzahlen. Eine Einführung in die Zahlentheorie
Übungsblatt 3

Aufgabe 9

Man zeige: Für alle ganzen Zahlen n gilt

$$\text{(i)}\quad 30 \mid n^5 - n, \qquad \text{(ii)}\quad 504 \mid n^9 - n^3.$$

Aufgabe 10

Für $n \geqslant 1$ sei $E(n) := (10^n - 1)/9$. Dies ist eine ganze Zahl, deren Dezimaldarstellung aus n Einsen besteht (sog. Repunit). Man zeige:

a) $E(n)$ ist höchstens dann prim, wenn n eine Primzahl ist.

b) Sei $p > 3$ prim. Besitzt $E(p)$ einen Primteiler q, so gilt $q \equiv 1 \bmod 2p$.

Aufgabe 11

Seien m, n positive ganze Zahlen und $d := \gcd(n, m)$. Man zeige:

a) Die Polynome $X^n - 1$ und $X^m - 1$ haben im Polynomring $\mathbb{Q}[X]$ den größten gemeinsamen Teiler $X^d - 1$.

b) Es gibt ganzzahlige Polynome $F(X), G(X) \in \mathbb{Z}[X]$ mit

$$F(X)(X^n - 1) + G(X)(X^m - 1) = X^d - 1.$$

c) Sind n, m teilerfremd, so sind auch die Repunits $E(n)$ und $E(m)$ teilerfremd.

Aufgabe 12

Im Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ betrachte man die Elemente

$$z_1 := \sqrt{-5}, \quad z_2 := 7, \quad z_3 := 29.$$

Welche dieser Elemente sind irreduzibel, welche sind prim?

Abgabetermin: Mittwoch, 28. Mai 2008, 14 Uhr, Übungskasten im 1. Stock