Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

SS 2008
7. Mai 2008

Primzahlen. Eine Einführung in die Zahlentheorie

Übungsblatt 2

Aufgabe 5

Seien x, y, z positive ganze Zahlen. Man beweise für das kleinste gemeinsame Vielfache von x, y, z die Formel

$$\operatorname{lcm}(x,y,z) = \frac{xyz \gcd(x,y,z)}{\gcd(x,y)\gcd(x,z)\gcd(y,z)}.$$

Aufgabe 6

Für eine ganze Zahl $n \geqslant 2$ sei $M(n)$ das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen $1, 2, \ldots, n$.

a) Man zeige

$$M(n) = \prod_{p \leqslant n} p^{r_p(n)} \quad \text{mit } r_p(n) := \left\lfloor \frac{\log n}{\log p} \right\rfloor.$$

b) Man beweise die Abschätzungen

$$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \leqslant M(n) \leqslant n^{\pi(n)}$$

Aufgabe 7

Es bezeichne $p_1 = 2, p_2, p_3, \ldots, p_n, \ldots$ die Folge der Primzahlen, der Größe nach geordnet.

a) Aus der Abschätzung $\pi(x) \leqslant Cx/\log x$ für $x \geqslant x_0$ folgere man

$$p_n \geqslant \frac{1}{C} n \log n \quad \text{für alle } n \geqslant n_0.$$

b) Es gelte $\pi(x) \geqslant cx/\log x$ für $x \geqslant x_0$. Man zeige: Zu jedem ε mit $0 < \varepsilon < c$ existiert ein $n_0 > 0$ mit

$$p_n \leqslant \frac{1}{c - \varepsilon} n \log n \quad \text{für alle } n \geqslant n_0.$$

c) Aus dem Primzahlsatz $\pi(x) \sim x/\log x$ folgere man $p_n \sim n \log n$.

Aufgabe 8

Sei $M := \{4k+1 : k \in \mathbb{Z}, k \geqslant 1\}$. Ein Element $x \in M$ heiße M-irreduzibel, wenn es sich nicht in der Form $x = yz$ mit $y, z \in M$ darstellen lässt.

Man zeige: Jedes $x \in M$ ist Produkt $x = z_1 \cdot \ldots \cdot z_r$ von M-irreduziblen Elementen $z_j \in M$, $r \geqslant 1$. Man gebe ein Beispiel dafür, dass diese Zerlegung im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt ist.

Abgabetermin: Mittwoch, 16. Mai 2008, 14 Uhr, Übungskasten im 1. Stock